ULB UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES, UNIVERSITÉ D'EUROPE

DIGITHÈQUE
Université libre de Bruxelles

DEVOLDER Pierre, *Finance stochastique*, Bruxelles, Editions de l'Université de Bruxelles, 1993.

Cette œuvre littéraire est soumise à la législation belge en matière de droit d'auteur.

Elle a été publiée par les
Editions de l'Université de Bruxelles
http://www.editions-universite-bruxelles.be/

Les règles d'utilisation de la présente copie numérique de cette œuvre sont visibles sur la dernière page de ce document.

L'ensemble des documents numérisés mis à disposition par les Archives & Bibliothèques de l'ULB sont accessibles à partir du site http://digitheque.ulb.ac.be/

Accessible à : http://digistore.bib.ulb.ac.be/2012/i2800410620_000_f.pdf

EDITIONS DE L'UNIVERSITE DE BRUXELLES

FINANCE STOCHASTIQUE

PIERRE DEVOLDER
PREFACE DE FRANÇOIS DELAVENNE

$$C(S,t) = S\phi\left(\frac{\log S/K + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) - Ke^{-r(T-t)}\phi\left(\frac{\log S/K + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)$$

COLLECTION
ACTUARIAT

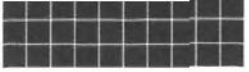
Un coup de dés jamais n'abolira le hasard
Stéphane MALLARMÉ

FINANCE STOCHASTIQUE

Directeur de la collection "Actuariat"
Marc Hallin

Dans la même collection
Les nouveaux produits d'assurance-vie,
Thierry Delvaux et Martine Magnée, 1991.
Techniques actuarielles des caisses de retraite
Daniel Dufresne (à paraître, 1993).

**Publié avec le concours du ministère de l'Education,
de la Recherche et de la Formation de la Communauté française**



EDITIONS DE L'UNIVERSITE DE BRUXELLES

FINANCE STOCHASTIQUE

PIERRE DEVOLDER

PREFACE DE FRANÇOIS DELAVENNE

PRESIDENT DE L'AFIR

COLLECTION

ACTUARIAT

© 1993 Editions de l'Université de Bruxelles
Avenue Paul Héger 26 - 1050 Bruxelles (Belgique)
D/1993/0171/4
ISBN 2-8004-1062-0
Imprimé en Belgique

Préface

Pendant longtemps, les risques d'assurance et les risques financiers ont été considérés comme de natures très différentes, justifiant que les actuaires et les financiers ne se parlent qu'occasionnellement.

La prise en compte de plus en plus explicite des aléas par le monde financier, l'interpénétration de plus en plus profonde des réalités financières et des activités de l'assurance ont conduit, dès 1988, la communauté actuarielle à prendre acte du rapprochement de ces deux mondes et à créer une section financière au sein de l'Association actuarielle internationale (AFIR).

Spécialiste par excellence du risque, l'actuaire a beaucoup à apporter à ses collègues financiers:

- une grande rigueur théorique, au niveau de la description et du traitement de l'aléa par la modélisation des processus stochastiques;

- un état d'esprit différent mais complémentaire, car la maximisation de la richesse de l'actionnaire d'une compagnie est pour l'actuaire toujours contrainte par la maximisation de l'espérance de vie de cette compagnie. Cette approche prudentielle, si l'on y prête un peu d'attention, permet de mieux réconcilier les objectifs long terme et court terme.

C'est pourquoi j'accueille avec grand plaisir l'ouvrage du professeur Pierre Devolder, "Finance stochastique". Membre de l'AFIR, titulaire d'un enseignement consacré aux "méthodes stochastiques de la finance" dans la licence en

Sciences actuarielles de l'Université libre de Bruxelles, Pierre Devolder allie les compétences de l'actuaire, de l'enseignant et du chercheur possédant une connaissance approfondie des fondements théoriques de la finance moderne. Ceci lui permet de dégager très élégamment l'apport de la théorie des processus stochastiques à la problématique financière moderne.

Le format retenu, l'approche volontairement didactique autour des trois grandes catégories d'instruments financiers que sont les actions, les obligations et les options, le rappel en annexe des principaux fondements mathématiques utilisés, assurent que cet ouvrage aura sa place sur la table tant des actuaires, que des praticiens de la finance ou des chercheurs et étudiants des deux disciplines. C'est un mérite suffisamment rare pour être à nouveau souligné. Je suis certain que cet ouvrage de référence suscitera de nouvelles vocations et renforcera le rayonnement des institutions auxquelles Pierre Devolder est associé.

François Delavenne
Président de l'AFIR

Introduction

Les marchés financiers ont connu ces trente dernières années une croissance exceptionnelle et inédite tant sur le plan quantitatif que qualitatif.

Parallèlement à l'expansion du volume des transactions et du nombre d'opérateurs, l'innovation en matière de produits a été remarquable - excessive, diront certains - et la perception de plus en plus affirmée des risques financiers a conduit de nombreux investisseurs à revoir leur stratégie et à accroître la diversification de leur portefeuille en y incluant des outils de plus en plus sophistiqués.

Schématiquement, les portefeuilles mobiliers classiques étaient jusqu'il y a peu constitués de deux grandes familles d'actifs: les *obligations* (et titres à revenu fixe assimilés) et les *actions*. Il s'agit, on le sait, de titres financiers représentatifs, dans le premier cas, d'un droit de créance et dans le second, d'un droit de propriété.

L'évolution des marchés a permis depuis, le développement de nouvelles générations de produits et ce processus de création, loin de s'essouffler, se poursuit inexorablement dans un contexte d'internationalisation croissant.

Le *deus ex machina* de cette innovation est sans conteste le risque: l'objectif recherché est de protéger l'investisseur contre des variations importantes de paramètres financiers influant sur sa richesse et sur lesquels il n'a pas prise. Il peut s'agir d'un risque de taux d'intérêt, de taux de devise, d'un risque de moins-value,...

Si de tels contrats de partage de risque existent entre tiers depuis très longtemps, la nouveauté réside dans l'institutionnalisation et la transformation de ces accords en titres financiers, négociables sur des marchés et pouvant faire

l'objet de cotations périodiques, à l'instar des actions ou obligations.

La volatilité croissante des marchés observée ces dernières années a joué bien sûr un rôle de catalyseur de ces nouveaux besoins de protection. Conceptuellement, on peut ranger ces produits en deux grandes catégories:

- les *contrats à terme*, consistant à conclure à des conditions fixées initialement une transaction différée dans le temps;
- les *options*, donnant le droit à conclure à des conditions fixées initialement une transaction différée dans le temps.

Simultanément à ce développement sans précédent des marchés financiers, les modélisations théoriques ont fleuri partout. Elles ont visé tant les nouveaux produits qui nécessitaient un support théorique de tarification, que les actifs financiers classiques qui, par leur volatilité croissante, semblaient obéir de plus en plus à des schémas aléatoires.

Ainsi, le risque financier a-t-il envahi jusqu'aux obligations classiques, titres pourtant réputés pour leur "sagesse", conduisant d'une part aux théories de l'immunisation, d'autre part à la naissance des obligations à taux variable.

La théorie des probabilités et des processus stochastiques a constitué un outil naturel pour modéliser cette incertitude semblant avoir frappé tout notre environnement financier.

A la complexité des situations financières a répondu la richesse des "instruments stochastiques". Certains de ces modèles, tel le célèbre modèle de Black et Scholes, ont, par leur popularité, acquis un statut normatif, dépassant parfois les conditions théoriques de leur validité.

Si les analystes financiers, au cœur de la tempête, ont, depuis longtemps, participé à cette éclosion théorique, le monde des actuaires est resté jusqu'à récemment assez en retrait par rapport à ces problèmes financiers. Grâce néanmoins à certains pionniers en son sein, la communauté actuarielle a enfin pris conscience depuis plusieurs années de l'importance de ces risques financiers et de leurs impacts sur les modèles actuariels classiques. La création en 1988, au sein de l'Association actuarielle internationale, d'une section financière (AFIR) ayant pour vocation de stimuler le développement de méthodes actuarielles en finance, illustre ce mouvement.

On a parlé, à cette occasion, avec quelque humour, d'"actuaires du troisième type": si, aux actuaires du "premier type", spécialistes de l'assurance-vie et utilisant un arsenal mathématique somme toute limité, ont succédé les actuaires du "deuxième type", spécialistes des questions d'assurances non-vie et grands utilisateurs du calcul classique des probabilités et de la statistique mathématique, voici venu le temps des actuaires du "troisième type", s'intéressant aux problèmes financiers et s'appuyant pour cela sur les techniques modernes sophistiquées de la théorie des processus stochastiques.

L'implication de l'actuaire dans le monde de la finance est naturelle à un double titre. D'une part, les réalités financières sous-jacentes des activités d'assurance occupent une part de plus en plus importante; cet envers fi-

nancier du décor technique ne peut plus être ignoré et dissocié des questions d'assurance. Le développement des modèles d'adéquation des actifs (volet financier) et des passifs (volet technique) est révélateur en ce sens et a été initié dès 1952 sous l'impulsion de l'actuaire britannique, Redington. D'autre part, les produits d'assurance-vie n'ont pas échappé aux grands chantiers de l'ingénierie financière et ont nécessité, dans leur conception même, la maîtrise d'outils de modélisation financière, tels les options.

Au niveau conceptuel, l'actuaire, spécialiste par excellence du risque, semble tout désigné pour aborder l'incertitude financière; il y a néanmoins lieu d'observer à ce sujet que l'étude des risques financiers est différente de celle des risques d'assurance. En effet, l'indépendance naturelle entre les risques au sein d'un portefeuille de risques d'assurance permet l'application de la loi des grands nombres. Il en va tout autrement des marchés financiers où les rendements des différents titres sont naturellement corrélés. Le type de modélisation utilisé se distanciera donc des outils classiques de la théorie du risque.

Au vu de ce qui précède, la publication de cet ouvrage dans une collection d'Actuariat ne surprendra guère le lecteur.

Conçu au départ d'un enseignement dispensé dans le cadre d'une formation d'actuaires, cet ouvrage est destiné à tous ceux qui désirent mieux connaître les fondements théoriques de la finance moderne: praticiens de la finance confrontés à des problèmes de modélisation, actuaires de plus en plus mêlés aux problèmes financiers, mathématiciens curieux des nouveaux horizons financiers, chercheurs, étudiants, ...

L'intégration de cet ouvrage dans une collection d'Actuariat se veut aussi gage d'une rigueur théorique - hélas parfois absente d'ouvrages de vulgarisation financière - et ce, tout en veillant aux réalités financières traitées. A cet égard, ce livre n'est ni un traité de finance (le lecteur y cherchera en vain les descriptions de certains marchés ou relevés statistiques de rendements de tel ou tel titre), ni un traité de théorie des processus stochastiques (l'aspect théorique n'y est présenté qu'en vue de la modélisation).

Le titre choisi, *Finance stochastique*, se réfère à cette ambition de marier subtilement la théorie financière et la théorie des processus stochastiques.

Parallèlement à cette volonté de rigueur, plutôt que de traiter d'une manière détaillée d'un aspect particulier du domaine - on ne compte plus les ouvrages exclusivement consacrés à la théorie des options - nous avons préféré dégager les grands principes unificateurs de la théorie au delà des objets traités.

Un tel ouvrage ne pouvait être exhaustif, compte tenu du dynamisme de la recherche en ce domaine; il tente plutôt, par la diversité des matières traitées, de mettre en évidence les modes de pensée de la finance moderne et d'inciter le lecteur à poursuivre.

Compte tenu de son caractère à la fois financier et mathématique, la matière traitée permettait *a priori* d'envisager deux types d'approches:

- soit on regroupait les sujets en fonction des méthodes mathématiques utilisées, les questions financières venant alors en illustration;
- soit on regroupait les sujets en fonction des produits financiers étudiés, les techniques stochastiques utilisées venant tout au long en renfort.

Nous avons délibérement opté pour cette deuxième voie; elle nous a semblé la plus motivante pour le lecteur et la plus naturelle dans le développement des idées. Elle permet également une consultation plus aisée.

Ce livre s'articule ainsi en trois chapitres pouvant être lus indépendamment et consacrés chacun à un type de produit financier: les actions, les obligations et les options. Une annexe résume les principaux concepts de la théorie des probabilités et des processus stochastiques utilisés.

Le *premier chapitre*, consacré aux actions, est construit autour de deux pôles importants: les modèles stochastiques d'évolution et les modèles de marché.

Les modèles d'évolution s'intéressent à la modélisation d'un titre et à l'évolution de sa valeur dans le temps, celle-ci étant supposée répondre à une équation de comportement.

L'équation de comportement la plus élémentaire d'un actif financier est donnée par l'équation différentielle élémentaire de capitalisation à taux composés:

$$\frac{dS}{dt}(t) = \delta \cdot S(t).$$

Compte tenu de leur caractère aléatoire, les actions nécessitent le passage à des équations d'évolution stochastique.

Nous présentons divers modèles développés en ce sens, que nous intégrons dans un modèle général unifié d'évolution d'un actif financier risqué, basé sur la théorie des semi-martingales. Ces modèles d'évolution d'actions, outre leur intérêt propre, sont notamment d'un emploi fréquent dans les méthodes de tarification des options présentées au chapitre 3.

Si ces modèles d'évolution s'intéressent à un titre isolément, les modèles de marché quant à eux intègrent la composante de diversité des titres sur un marché.

La théorie du portefeuille (*Modern Portfolio Theory*) vise, dans ce contexte, au choix optimal d'un portefeuille en présence de plusieurs titres, dont la distribution des rendements est supposée connue. Elle débouche naturellement sur des théories explicatives de la structure des rendements des titres sur un marché équilibré; nous présentons dans ce cadre le célèbre modèle du CAPM (*Capital Asset Pricing Model*).

Abordant au *chapitre 2* les produits obligataires, nous avons d'abord voulu illustrer par quelques exemples élémentaires le risque financier attaché naturellement à ces titres et parfois oublié. La clé de cet aspect aléatoire réside

dans la dynamique de la structure des taux; elle conduit en pratique aux situations bien connues de plus- ou moins-values sur obligations.

Nous développons ainsi divers modèles stochastiques de structure des taux d'intérêt qui permettent d'aborder la tarification des obligations en horizon aléatoire.

Face à ce risque de taux attaché aux obligations, des stratégies de protection ont été introduites, visant à immuniser au maximum l'investisseur d'une variation de sa richesse consécutive à un mouvement de la courbe des taux. Ces théories de l'immunisation conduisent à de nombreuses applications pratiques notamment l'ALM (*Assets Liabilities Management*). L'environnement général de volatilité des taux a conduit d'autre part à la naissance sur certains marchés de nouveaux produits obligataires; nous étudions, à titre d'exemple, les obligations à taux variable.

Les options, introduites au *chapitre 3*, constituent sans conteste un des sujets privilégiés d'étude de la finance moderne. Elles ont joué un rôle essentiel de focalisation des nouveaux risques financiers, tant au niveau de l'approche théorique que de la réalité quotidienne des marchés.

Notre étude des options débute, après le rappel de quelques définitions de base, par un exemple élémentaire assez déconcertant.

En effet, un produit optionnel a une ressemblance conceptuelle avec un produit d'assurance: il s'agit, dans les deux cas, de se protéger contre un événement aléatoire conduisant à un appauvrissement. La tentation est donc grande d'appliquer au problème de la tarification des options, les techniques utilisées en matière de principes de calcul des primes.

En réalité, malgré les similitudes évoquées, le problème est d'une tout autre nature.

Les principes de calcul des primes en assurance sont tous basés sur la loi des grands nombres qui permet, par l'indépendance et donc la compensation entre les risques, d'approcher la prime par l'espérance mathématique du risque, majoré d'un chargement de sécurité variable selon l'aversion au risque de l'assureur. D'autre part, quel que soit le niveau de prime réclamé, le risque de ruine est toujours présent pour l'assureur.

Ces diverses considérations sont non pertinentes en théorie classique des options. Ainsi, l'exemple élémentaire présenté aboutit aux constatations suivantes, pour le moins insolites:

- le prix de l'option est unique et ne dépend pas de l'aversion au risque de l'intermédiaire financier;
- le prix de l'option est indépendant de la distribution de probabilité du risque sous-jacent; il ne dépend que de l'ensemble des états possibles.

Ces deux propriétés ne sont en fait que les marques apparentes d'une structure sous-jacente fondamentale: l'existence d'une stratégie financière construite à partir d'actifs classiques, et qui permet de dupliquer exactement les effets

de l'option.

L'intermédiaire financier peut alors, en faisant appel à cette stratégie, annihiler d'une certaine façon le caractère aléatoire de l'option: il est couvert, non pas en moyenne, mais quel que soit le résultat de l'expérience aléatoire. Ces stratégies dites de duplication sont à la base des différents modèles d'évaluation classiques d'options présentées, dont notamment le célèbre modèle de Black et Scholes. Un modèle général de tarification des options met d'ailleurs en lumière ces principes de couverture.

A titre symbolique de liaison entre option et assurance, nous terminons ce chapitre par une application de la théorie des options au calcul de primes d'assurances-vie liées à des fonds d'investissement avec garantie minimale. Le prix de l'option joue dans ce cadre le rôle naturel de prime de risque, s'agissant cette fois d'un risque financier et non d'un risque technique usuel.

Chapitre 1
Les actions

1 Introduction

Les actions ont toujours constitué un sujet d'étude privilégié pour les financiers; outre leur importance et leur omniprésence dans les circuits de la vie économique, elles représentent à l'évidence l'exemple fondamental de titre risqué, où se mêlent de manière indissociable le rendement et le risque.

Par leur caractère éminemment fluctuant, elles ont fait l'objet des premiers modèles stochastiques d'évaluation.

Deux grands axes peuvent être mis en évidence dans l'analyse aléatoire des actions.

Une première famille de modèles s'intéresse à l'évaluation du prix d'un titre bien défini ainsi qu'à son évolution; il s'agit donc de modèles dynamiques dans le temps. Ces modèles feront l'objet des sections 3 et 4; nous privilégierons dans ce cadre les modèles continus hérités notamment du calcul stochastique. Outre leur intérêt propre, ces méthodes joueront un rôle essentiel dans l'évaluation des options.

Une deuxième classe de modèles s'est développée, dans une optique de marché. Plutôt que d'analyser un titre isolément, il s'agit ici de traiter globalement un marché financier d'actions, d'établir des stratégies optimales de portefeuille (*Modern Portfolio Theory*) ou de mettre en évidence des équilibres macro-économiques entre risque et rendement des différents titres présents

(*Capital Asset Pricing Model*). Les méthodes utilisées sont le plus souvent discrètes, et sur une période de temps. Elles seront présentées à la section 5.

2 Définitions générales

Nous rappelons ici succinctement quelques notions de base liées aux actions.

2.1 L'action

Une *action* est un titre financier représentatif d'une part de propriété d'une société. Sa valeur, qui peut ou non faire l'objet d'une cotation régulière dans le cadre d'un marché organisé, est liée à la valeur intrinsèque de la société mais peut également être soumise à des mouvements spéculatifs. Les actions sont créées lors de la constitution de la société ou à l'occasion d'une augmentation de capital de celle-ci. Elles peuvent ensuite faire l'objet de cessions ou d'acquisitions entre parties ou dans le cadre d'un marché organisé.

2.2 Le dividende

Le *dividende* est le revenu périodique - généralement annuel - généré par l'action.

Le montant du dividende, sur lequel aucune garantie ne porte, et qui représente donc un caractère totalement aléatoire, est fonction des résultats de la société sur la période considérée et de sa politique de distribution et de mise en réserve.

2.3 Le titre négociable

Un *titre négociable* est un titre financier pouvant faire l'objet à tout moment d'une cession ou d'une acquisition dans le cadre d'un marché organisé. Les actions cotées sont un exemple de titre négociable.

2.4 Le titre avec distribution

Un *titre avec distribution* est un titre financier donnant droit à son détenteur, à la perception de revenus, durant la période de détention.

Les actions avec dividende sont un exemple de titre avec distribution.

Par opposition, on parle de *titre de capitalisation* lorsqu'aucun revenu n'est distribué en cours de détention.

3 Modèles déterministes

Nous nous intéresserons ici à l'évaluation du prix d'une action, ainsi qu'à son évolution dans le temps. Notons que la méthodologie déterministe utilisée peut être appliquée à d'autres types de titres financiers, qu'il s'agisse de titre avec distribution ou de titre de capitalisation.

3.1 Modèle d'évaluation de Gordon-Shapiro

Le problème posé est d'évaluer le prix actuel d'une action, en fonction d'information sur ses potentialités de revenus futurs, c'est-à-dire de ses dividendes futurs. *La valeur d'une action est alors assimilée à la valeur actuelle de ses dividendes futurs, sur un horizon infini* et calculée à un taux d'actualisation fixé, censé refléter le rendement attendu de l'investissement.

En posant S_0 la valeur en l'instant $t = 0$ d'investissement de l'action, il vient donc

$$S_0 = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{D_t}{(1+k)^t} \tag{3.1}$$

où

(i) k est le taux d'actualisation ($k > 0$);

(ii) $D_1, D_2, \ldots D_t, \ldots$ sont les dividendes futurs estimés, aux temps $t = 1, 2, \ldots$

La formule (3.1) est relative au prix de l'action juste après versement du dividende en $t = 0$. Lorsque l'évaluation se fait en cours d'année entre deux dates de distribution, il vient

$$S_0 = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{D_{t+m}}{(1+k)^{t+m}} \tag{3.2}$$

où m ($0 < m < 1$) est la longueur de l'intervalle de temps qui sépare l'évaluation de la prochaine distribution.

En supposant à présent que les dividendes futurs connaîtront une croissance à un taux constant g,

$$D_t = D_{t-1}(1+g)$$

la formule (3.1) prend alors la forme suivante, appelée formule de Gordon-Shapiro

$$\begin{aligned} S_0 &= \sum_{t=1}^{\infty} \frac{D_t}{(1+k)^t} = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{D_1(1+g)^{t-1}}{(1+k)^t} \\ &= \frac{D_1}{1+k} \sum_{t=1}^{\infty} \left(\frac{1+g}{1+k}\right)^{t-1} \end{aligned}$$

En supposant $0 < g < k$, cette dernière série converge, et il vient

$$S_0 = \frac{D_1}{1+k} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1+g}{1+k}}$$

ou

$$S_0 = \frac{D_1}{(k-g)} \tag{3.3}$$

Pour plus de détails sur ce modèle, nous renvoyons par exemple à Broquet et van den Berg (1990).

3.2 Modèle d'évolution d'un titre de capitalisation

Considérons un investisseur plaçant en $t = 0$ un montant initial S_0 dans un titre financier, que nous supposerons, dans un premier temps, sans distribution.

Le problème posé est cette fois, non plus d'estimer la valeur initiale du titre, mais d'étudier l'évolution dans le temps de la valeur de l'investissement initial S_0.

Nous présenterons successivement un modèle discret, puis un modèle continu, qui pourront ensuite tous deux s'intégrer dans un modèle général basé sur une équation intégrale d'évolution.

3.2.1 Modèle discret de capitalisation

L'investisseur acceptant de se dessaisir d'une partie de sa fortune exigera en compensation une rémunération qui viendra, dans un titre de capitalisation, accroître la valeur du titre. Dans le modèle discret le plus simple, en notant $S(n)$ la valeur du titre au temps n $(n = 0, 1, 2, \ldots, T)$, on suppose que celle-ci croît d'un facteur constant $(1 + i)$ lors de chaque période unitaire de temps

$$S(n) = S(n-1) \cdot (1+i).$$

On obtient alors par récurrence la formule classique des intérêts composés

$$S(n) = S_0 \cdot (1+i)^n \qquad (n = 0, 1, 2 \ldots T) \quad . \tag{3.4}$$

Lorsque le taux i n'est plus constant, mais varie d'une période à l'autre, on a la généralisation immédiate

$$S(n) = S_0 \cdot \prod_{k=1}^{n} (1+i_k) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots T) \quad , \tag{3.5}$$

où i_k $(k = 1, 2, \ldots, T)$ est le taux pour la période $(k-1, k)$.

3.2.2 Modèle continu de capitalisation

Plutôt que de considérer comme dans le paragraphe ci-avant que l'accroissement se fait à des époques fixées, on peut introduire un modèle continu dans le temps, où la valeur du titre croît continûment.

Dans un premier modèle homogène, on suppose que l'accroissement est proportionnel à la fois à la période de temps et à la valeur du titre.

Si l'on note $S(t)$ la valeur du titre au temps t ($t \in [0,T] \subset \mathbf{R}^+$), on a donc

$$S(t+\Delta t) = S(t) + \delta \cdot S(t) \cdot \Delta t \ ,$$

où δ est un taux continu.

En passant à la limite, on obtient l'équation différentielle linéaire suivante:

$$\frac{dS}{dt}(t) = \delta \cdot S(t), \tag{3.6}$$

avec $S(0) = S_0$, dont la solution est

$$S(t) = S_0 \cdot \exp \delta t. \tag{3.7}$$

Notons qu'une liaison peut être établie entre les formules (3.4) du modèle discret et (3.7) du modèle continu, aux époques discrètes $t = 1, 2, \ldots, n, \ldots$, en posant

$$(1+i) = \exp \delta,$$

ou

$$\delta = \ell n(1+i).$$

Ce modèle continu peut également être généralisé lorsque le taux δ varie dans le temps.

En supposant que la fonction $\delta()$ est continue par morceaux sur l'intervalle $[0,T]$, la valeur du titre est alors solution de

$$\frac{dS}{dt}(t) = \delta(t) \cdot S(t), \tag{3.8}$$

i.e.

$$S(t) = S_0 \cdot \exp \int_0^t \delta(s) ds. \tag{3.9}$$

3.2.3 Modèle général d'évolution

On peut intégrer les modèles discrets et continus vus plus haut dans un modèle général d'évolution d'un titre de capitalisation.

Considérons pour ce l'équation intégrale sur $[0,T]$

$$S(t) = S_0 + \int_0^t S(s^-) dI(s) \tag{3.10}$$

où

(i) $S(s^-) = \lim_{r \underset{<}{\to} s} S(r)$;

(ii) $I(\cdot)$, baptisée *flux de rendement*, est une fonction continue par morceaux à variation bornée sur $[0,T]$, continue à droite sur $[0,T[$ et avec $I(0) = 0$.

La fonction $I(\cdot)$ admet, comme fonction à variation bornée, une décomposition de Lebesgue du type

$$I(\cdot) = J(\cdot) + K(\cdot)$$

où

(i) $J(\cdot)$ est une fonction continue sur $[0,T]$;

(ii) $K(\cdot)$ est une fonction en escaliers sur $[0,T]$.

En supposant de plus la partie continue $J(\cdot)$ absolument continue, on peut finalement représenter le flux de rendement par

$$I(t) = \int_o^t \delta(s)ds + \sum_{k|S_k \leq t} i_k \qquad (t \in [0,T]) \tag{3.11}$$

où

(i) $J(t) = \int_0^t \delta(s)ds$ est la partie absolument continue dérivable p.p.

(ii) $K(t) = \sum_{k|S_k \leq t} i_k$ est la partie à sauts,

- les instants de sauts étant notés $S_1, \ldots S_k \ldots S_n$ et appartenant à $(0,T)$
- les amplitudes de sauts correspondantes étant notées $i_1, \ldots, i_k, \ldots i_n$.

On a alors le théorème fondamental suivant:

THÉORÈME 1.1

La solution de l'équation de capitalisation (3.10) sous le flux de rendement (3.11) est donnée par

$$S(t) = S_0 \cdot \prod_{k|S_k \leq t} (1 + i_k) \cdot \exp \int_0^t \delta(s)ds \quad . \tag{3.12}$$

La solution générale apparaît donc comme une superposition multiplicative des formules discrète (3.5) et continue (3.9).

Démonstration

a) Lorsque $I(t) = \int_0^t \delta(s)ds$ sur $[0,T]$, l'équation intégrale (3.10) se réduit à l'équation différentielle (3.8) et la solution en résulte.

b) Lorsque $I(t) = \sum_{k|S_k \leq t} i_k$, la constance de la fonction I sur chaque intervalle $[S_k, S_{k+1}]$, implique par l'équation (3.10) la constance de la fonction S sur ces intervalles, et l'équation intégrale (3.10), se réduit au schéma aux différences

$$S(S_k) = S_0 + \sum_{j=1}^{k} i_j \cdot S(S_{j-1}) \qquad \text{(en posant } S_0 = 0),$$

dont la solution s'obtient aisément par récurrence

$$S(S_k) = S_0 \cdot \prod_{j=1}^{k} (1 + i_j).$$

La solution en résulte.

c) Dans le cas général, la formule (3.12) s'obtient aisément, en remarquant que
(i) en un instant $t \in (S_k, S_{k+1})$, l'équation (3.10) peut s'écrire

$$S(t) = S(S_k) + \int_{S_k}^{t} S(s)\delta(s)ds.$$

(ii) en un instant de saut $t = S_k$,

$$\begin{aligned} S(S_k) &= S(S_{k-1}) + \int_{S_{k-1}}^{S_k} S(s)\delta(s)ds + S(S_k^-) \cdot i_k \\ &= S(S_k^-) + S(S_k^-) \cdot i_k \\ &= S(S_k^-) \cdot (1 + i_k). \end{aligned}$$

Par récurrence la solution en résulte. ■

REMARQUES

a) Ce modèle général permet d'appréhender des situations où coexistent une tendance continue, et des sauts ou chocs (par exemple des plus-values sur titre).

b) La croissance de la fonction valeur du titre $S(\cdot)$ est assurée lorsque le flux de rendement $I(\cdot)$ est croissant, c'est-à-dire lorsque la fonction $\delta(\cdot)$ et les amplitudes $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$ sont positives.

Le modèle s'applique néanmoins de manière plus générale lorsque le flux $I(\cdot)$ est simplement à variation bornée. La fonction $\delta(\cdot)$ peut alors être de signe quelconque, et certaines amplitudes peuvent être négatives. Ce dernier point peut être notamment utilisé dans la modélisation des titres avec distribution (voir paragraphe 3.3).

3.3 Modèle d'évolution d'un titre avec distribution

Une méthodologie semblable à celle vue au paragraphe précédent peut être utilisée pour la modélisation de l'évolution d'un titre avec distribution.

Considérons pour ce un titre, soumis d'une part à un flux de rendement $I(\cdot)$ du type (3.11), et donnant lieu d'autre part à une distribution, que nous appellerons dividende, aux époques équidistantes $t = 1, 2, 3, \ldots N$ avec $N \leq [T]$, supposées disjointes des époques de discontinuités du flux $I(\cdot)$. Posons

$$j_k = \frac{\text{dividende au temps } k}{\text{valeur du titre juste avant distribution en } k}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, N).$$

On peut alors construire le flux agrégé

$$I^*(t) = I(t) - \sum_{k=1}^{[t]} j_k$$

et envisager l'équation de "capitalisation-distribution"

$$S(t) = S_0 + \int_0^t S(s^-)dI^*(s),$$

dont la solution est donnée par le théorème 1.1:

$$S(t) = S_0 \cdot \prod_{k|S_k \leq t} (1 + i_k) \cdot \prod_{k=1}^{[t]} (1 - j_k) \cdot \exp \int_0^t \delta(s)ds. \tag{3.13}$$

Montrons que les coefficients j_k correspondent bien à leur définition donnée ci-dessus; il suffit pour ce de remarquer qu'en un instant k de distribution, on a

$$\begin{aligned} S(k) &= (1 - j_k) \cdot S(k^-) \\ &= S(k^-) - j_k \cdot S(k^-). \end{aligned}$$

Le montant $j_k \cdot S(k^-)$ correspond donc au dividende versé en k, et la définition de j_k en résulte. La relation (3.13) permet donc de simuler l'évolution d'un titre soumis d'une part à des variations de valeur, continues ou impulsionnelles, positives ou négatives, en cours d'année, et d'autre part à une distribution annuelle.

Pour un tel titre, l'accroissement de fortune de l'investisseur résulte à la fois des revenus engendrés (c'est-à-dire les dividendes) et de l'accroissement de valeur du titre. On définit dans ce contexte, le taux de rendement annuel d'un tel actif.

DÉFINITION 1.1

Le *taux de rendement*, noté $r(k)$, d'un titre avec distribution de loi d'évolution $S(\cdot)$, sur l'intervalle de temps $(k-1, k]$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$, est défini par

$$r(k) = \frac{S(k) - S(k-1) + \text{ dividende en } k}{S(k-1)}. \tag{3.14}$$

Lorsque la loi d'évolution du titre suit la relation (3.13), il vient

$$\begin{aligned} r(k) &= \frac{S(k) - S(k-1) + j_k \cdot S(k^-)}{S(k-1)} \\ &= \frac{S(k) - S(k-1) + j_k \cdot S(k)/(1 - j_k)}{S(k-1)} \\ &= [S(k-1) \cdot \exp \int_{k-1}^k \delta(s)ds \cdot (1 - j_k) \cdot \prod_{r|k-1<S_r<k} (1 + i_r) \cdot \left(1 + \frac{j_k}{1 - j_k}\right) \\ &\quad - S(k-1)]/S(k-1) \quad , \end{aligned}$$

ou

$$1 + r(k) = \left(\exp \int_{k-1}^{k} \delta(s) ds \right) \cdot \prod_{r|k-1<S_r<k} (1 + i_r) \ ,$$

ce qui est cohérent avec la définition du flux de rendement.

Le taux de rendement d'un titre avec distribution comprend deux composantes:

$$r(k) = \frac{S(k) - S(k-1)}{S(k-1)} + \frac{\text{dividende en } k}{S(k-1)} \ .$$

La première représente le rendement en capital, la seconde le rendement en revenu.

4 Modèles stochastiques d'évolution

Nous généralisons ici en univers aléatoire les modèles d'évolution de titres, vus aux paragraphes 3.2 et 3.3. Comme dans le cas déterministe, nous construirons différents types de modèles, discrets puis continus, qui s'intégreront ensuite dans un modèle général basé sur la théorie des semi-martingales.

Sauf mention contraire, nous travaillerons avec des titres de capitalisation, l'introduction d'une distribution de dividende pouvant se faire dans le même esprit qu'au paragraphe 3.3.

4.1 Modèle binomial

Le modèle déterministe discret le plus simple de capitalisation nous a conduit à la relation de récurrence

$$S(n) = S(n-1) \cdot (1 + i),$$

où - $S(n)$ est la valeur du titre au temps n $(n = 0, 1, 2, \ldots T)$

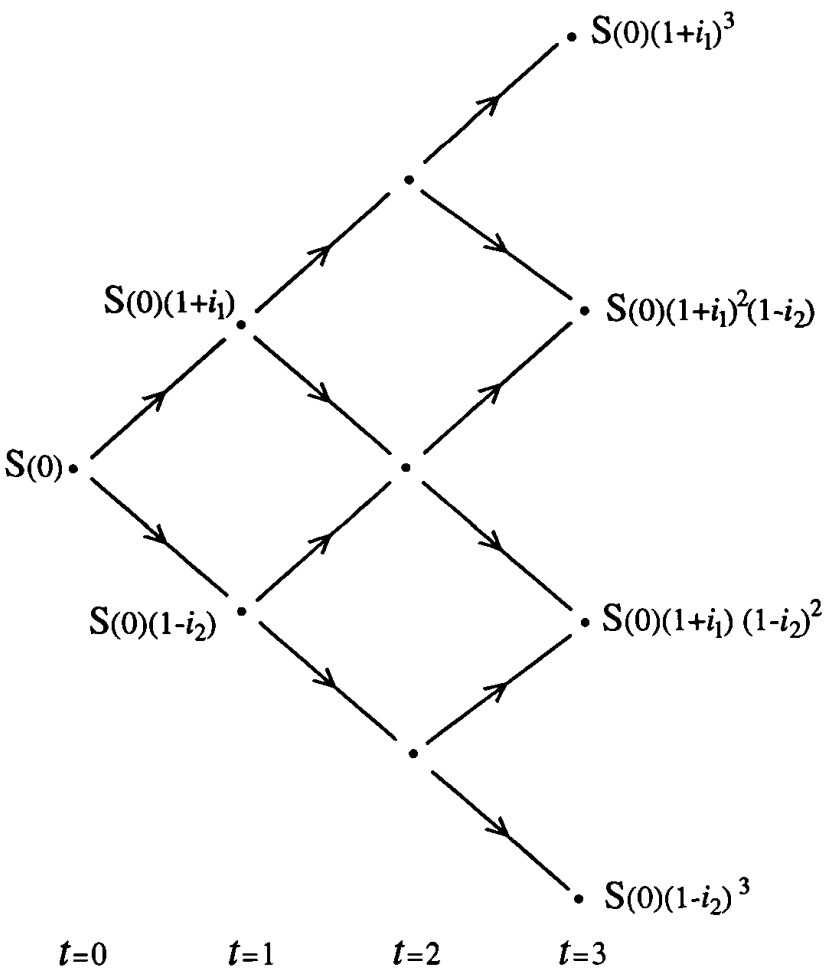
- $(1 + i)$ est un facteur d'accroissement du titre.

La manière la plus simple d'introduire en univers aléatoire le concept d'incertitude sur ce titre, et de conduire de ce fait à la notion de risque financier, consiste à substituer au facteur d'accroissement du titre $(1 + i)$, une suite de variables aléatoires $(1 + \chi_1), (1 + \chi_2), \ldots, (1 + \chi_T)$ supposées indépendantes et identiquement distribuées définies sur un espace de probabilité adéquat, et telles que

$$\forall j : 1 + \chi_j = \begin{cases} u = 1 + i_1 > 1 & \text{avec une probabilité } q \\ d = 1 - i_2 < 1 \quad (i_2 < 1) & \text{avec une probabilité } (1 - q). \end{cases}$$

Deux scénarios peuvent donc se présenter lors de chaque période: soit la valeur du titre s'accroît d'un facteur u; soit la valeur du titre décroît d'un facteur d.

L'évolution du titre peut être illustrée par un treillis binomial:



En un instant fixé $t = j$ $(1 \leq j \leq T)$, notons $N(j)$ la variable aléatoire représentant le nombre de hausses depuis l'origine $t = 0$.

Compte tenu de l'indépendance des variables aléatoires $(1+\chi_1), (1+\chi_2), \ldots, (1+\chi_j)$, on établit aisément la propriété suivante.

PROPRIÉTÉ 1.1

Les variables $N(j)$, $j = 1, \ldots, T$ sont des variables binomiales de paramètre q et d'exposant j:

(i) $\mathsf{P}(N(j) = k) = \dfrac{j!}{k!(j-k)!} \cdot q^k (1-q)^{j-k}$, $(k = 0, \ldots, j)$

(ii) $\mathsf{E}(N(j)) = j \cdot q$.

D'autre part, la valeur du titre est donnée par la relation

(iii)

$$S(j) = S(0) \cdot (1+i_1)^{N(j)} \cdot (1-i_2)^{j-N(j)}. \tag{4.1}$$

En particulier,

(iv)

$$\mathsf{E}(S(j)|S(0)) = S(0) \cdot \sum_{k=0}^{j} \frac{j!}{k!(j-k)!} q^k (1-q)^{j-k} \cdot (1+i_1)^k (1-i_2)^{j-k}. \tag{4.2}$$

Cette dernière formule peut être considérée comme une généralisation de la formule déterministe (3.4) dans ce premier modèle aléatoire élémentaire.

4.2 Modèle de Poisson

Le modèle de Poisson peut être considéré comme intermédiaire entre des modèles discrets du type modèle binomial (paragraphe 4.1) et les modèles continus basés sur le calcul stochastique (paragraphes 4.3 et suivants). En effet, comme dans le modèle binomial, la valeur du titre n'évoluera que par sauts en des instants déterminés; en revanche l'échelle des temps ne sera plus discrète mais continue.

Le tableau ci-dessous compare conceptuellement les modèles binomial et de Poisson.

Modèle binomial	Modèle de Poisson
(i) La modélisation est discrète dans le temps $\{S(j); j = 0, 1, 2, \ldots T\}$.	(i) La modélisation est continue dans le temps: $\{S(t); t \in [0, T] \subset \mathbf{R}\}$.
(ii) Les variations de la valeur du titre se produisent en temps fixés $j = 0, 1, 2, \ldots$	(ii) Les variations de la valeur du titre se produisent à des instants aléatoires suivant un processus de Poisson.
(iii) Les taux de croissance du titre, $\chi_1, \chi_2, \ldots \chi_T$ sont des variables aléatoires indépendantes, équidistribuées, ne pouvant prendre que les valeurs i_1 et $-i_2$, respectivement avec une probabilité q et $1 - q$.	iii) Les taux de croissance du titre sont des variables aléatoires indépendantes, équidistribuées, de fonction de répartition G donnée, à valeurs dans un compact de $(-1, +\infty)$.

La définition précise du modèle de Poisson peut se faire à l'aide de l'équation générale d'évolution (3.10) introduite dans un contexte déterministe.

DÉFINITION 1.2

a) On considère un *flux de rendement* donné par un processus stochastique $\{I(t,\omega); t \in [0,T], \omega \in \Omega\}$ admettant la représentation suivante:

$$I(t,\omega) = \sum_{n|S_n(\omega)\leq t} i_n(\omega) \tag{4.3}$$

où

(i) $\{i_1, i_2, \ldots\}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et équidistribuées de fonction de répartition donnée G, à valeurs dans un compact de $(-1, +\infty)$. On notera

$$\begin{aligned} i &= \mathbf{E}(i_1) = \mathbf{E}(i_2) = \ldots \\ &= \int_{(-1,+\infty)} x dG(x). \end{aligned}$$

(ii) $\{S_1, S_2, \ldots\}$ est la suite d'instants des arrivées des sauts, suivant un processus de Poisson de paramètre λ (voir annexe 2).

Le flux de rendement I est donc un processus de Poisson composé et on a

$$\mathsf{E}I(t) = \bar{i}\lambda \cdot t.$$

b) On considère un titre dont le cours donné par un processus stochastique $\{S(t,\omega), t \in [0,T], \omega \in \Omega\}$ obéit à l'équation de capitalisation

$$S(t) = S_0 + \int_0^t S(s^-)dI(s)$$

où I est donné par (4.3).

L'intégrale stochastique s'entendant ici au sens de Stieltjes trajectoire par trajectoire, le théorème 1.1 permet d'obtenir l'expression explicite

$$S(t,\omega) = S_0 \cdot \prod_{n|S_n(\omega)\leq t} (1 + i_n(\omega)) \quad . \tag{4.4}$$

Les moments du processus S peuvent être déterminés à l'aide des propriétés du processus de Poisson composé. On a, en particulier, pour la moyenne, l'expression suivante.

PROPRIÉTÉ 1.2

$$\begin{aligned} \mathsf{E}S(t) &= S_0 \cdot \exp(\bar{i}\lambda \cdot t) \\ &= S_0 \cdot \exp(\mathsf{E}I(t)) \quad . \end{aligned} \tag{4.5}$$

Démonstration

La relation peut être obtenue par la technique des fonctions génératrices.

Si X est une variable aléatoire, alors sa fonction génératrice, si elle existe, est donnée par

$$M_X(u) = \mathsf{E}(e^{uX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ux} dF(x) \quad ,$$

où F est la fonction de répartition de la variable X. En particulier, si X admet une distribution de Poisson de paramètre λ, on peut montrer (voir annexe 1, propriété 4.6) que sa fonction génératrice existe et est donnée par

$$M_X(u) = e^{\lambda(e^u - 1)}.$$

D'autre part, si S est une variable aléatoire de la forme

$$S = X_1 + X_2 \ldots + X_N$$

où

(i) $\{X_1, X_2, \ldots\}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et équidistribuées, de fonction de répartition commune F et de fonction génératrice commune M_X.

(ii) N est une variable aléatoire entière non négative, indépendante de la suite $\{X_1, X_2, \ldots\}$, de distribution donnée par

$$p_n = \mathbf{P}(N = n)$$

et de fonction génératrice

$$m(u) = \sum_n e^{un} p_n,$$

(c'est-à-dire: S est une somme d'un nombre aléatoire de variables aléatoires), alors la fonction génératrice de la variable S est donnée par

$$M_S(u) = \mathbf{E}(e^{uS}) = m(\log M_X(u))$$

(voir annexe 1, propriété 4.3).

En particulier, si N est régi par une distribution de Poisson de paramètre λ, il vient

$$M_S(u) = e^{\lambda(M_X(u)-1)}.$$

Calculons alors l'espérance mathématique de la formule (4.4) (en supposant $S_0 = 1$):

$$\begin{aligned} I &= \mathbf{E}\left[\prod_{n|S_n \le t} (1 + i_n)\right] = \mathbf{E}\left[\prod_{n|S_n \le t} e^{\log(1+i_n)}\right] \\ &= \mathbf{E}\left[e^{\sum_n \log(1+i_n)}\right] = \mathbf{E}\left[e^{Z(t)}\right] = M_{Z(t)}(1) \end{aligned}$$

où

$Z(t, \omega) = \sum_{n|S_n(\omega) \le t} i_n^*(\omega)$ avec $i_n^*(\omega) = \log(1 + i_n(\omega))$.

Le processus Z est donc de même nature que le flux de rendement I défini en (4.3), si ce n'est que les amplitudes de sauts du processus de Poisson $i(\omega)$ sont remplacées par $\log(1 + i(\omega))$.

Il en découle que la fonction génératrice du processus est donnée par

$$M_{Z(t)}(u) = e^{\lambda t(M(u)-1)}$$

où $M(u) = \mathbf{E}(e^{ui^*})$.

En particulier, $M(1) = \mathbf{E}(e^{i^*}) = \mathbf{E}(e^{\log(1+i)}) = \mathbf{E}(1 + i) = 1 + \bar{i}$. En substituant dans I, il vient

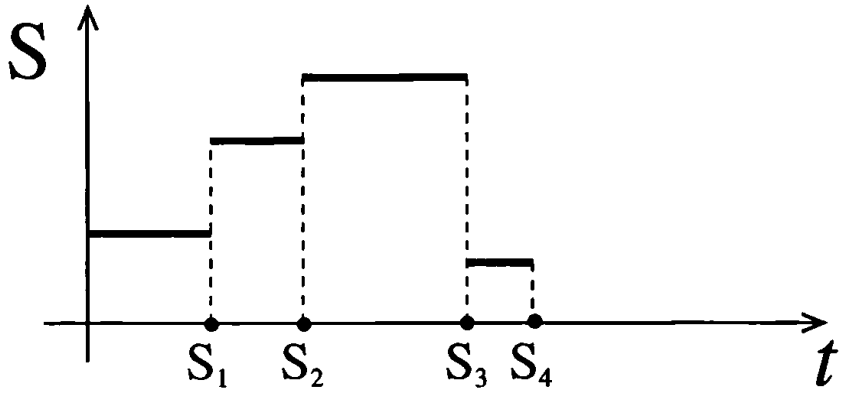
$$I = M_{Z(t)}(1) = e^{\lambda t(M(1)-1)} = e^{\lambda t \cdot \bar{i}}.$$

■

REMARQUES

a) Il existe une dualité intéressante à noter dans ce modèle de Poisson, entre d'une part l'aspect trajectoire du processus, et d'autre part la fonction moyenne donnée par la propriété 1.2:

- compte tenu de la construction du processus, basée sur des impulsions en des instants aléatoires, chacune des trajectoires du processus est une fonction en escalier, la valeur du titre S restant constante entre deux instants de sauts; un exemple de trajectoire est donné ci-dessous.



- la relation moyenne (4.5) montre en revanche qu'en moyenne, le rendement associé à ce processus est équivalent à une capitalisation continue à taux constant instantané $\delta = \bar{i} \cdot \lambda$ (voir relation (3.7)) égal au produit de la moyenne des amplitudes de saut et du taux du processus d'arrivée des sauts.

b) Financièrement, ce type de modèle permet de modéliser l'occurrence de plus- ou moins-values touchant des titres en des instants non prévisibles.

4.3 Modèle brownien additif

Le premier modèle stochastique continu d'évolution du prix d'un titre a été développé dès 1900 par Bachelier. Celui-ci suppose que le cours d'une action suit une promenade aléatoire continue, en vertu de laquelle il existerait autant de chances pour que durant une période donnée, le cours augmente ou diminue d'un même montant.

Plus précisément, en notant

$$\{S(t,\omega); t \in [0,T], \omega \in \Omega\} \text{ le processus cours du titre,}$$

celui-ci admet la représentation suivante.

DÉFINITION 1.3

$$S(t,\omega) = S(0) + \sigma \cdot w(t,\omega) \tag{4.6}$$

où

(a) σ est une constante, appelée volatilité du titre

(b) $\{w(t,\omega); t \in [0,T], \omega \in \Omega\}$ est un mouvement brownien standard (voir annexe 3) c'est-à-dire

(i) $w(0) = 0$

(ii) w est un processus à accroissements indépendants et stationnaires

(iii) $w(t) - w(s)$ admet une distribution normale de moyenne nulle et de variance égale à $t - s$, $(s < t < T)$.

Le mouvement brownien est une généralisation en temps continu de la promenade aléatoire; l'annexe 3 reprend les principales caractéristiques de ce type de processus. Des propriétés de ce mouvement brownien, il résulte en particulier la proposition suivante.

PROPRIÉTÉ 1.3

a) Le cours du titre à l'instant t est distribué normalement de moyenne constante égale à $S(0)$ et d'écart-type égal à $|\sigma|\sqrt{t}$.

b) Le processus cours S est une martingale:

$$\mathsf{E}[S(t)|S(s)] = S(s) \qquad s < t.$$

Cette modélisation, malgré son support intuitif de promenade aléatoire, constitue en réalité une représentation peu satisfaisante des variations de cours; elle permet notamment l'existence de prix négatifs illimités.

4.4 Modèle brownien géométrique

L'étape décisive suivante, développée notamment par Samuelson (1973), consiste à maintenir l'idée de promenade aléatoire, soutenue techniquement par un mouvement brownien, mais de l'appliquer, non pas au cours du titre, mais à son rendement. Plus précisément, le modèle brownien additif satisfait à la propriété suivante:

$$\forall \quad 0 < s < t < T : S(t) - S(s) \text{ est indépendant de } S(s)$$

(l'accroissement absolu du cours est indépendant du niveau atteint du cours). Cette propriété est une conséquence directe du caractère à accroissements indépendants du mouvement brownien. Cette propriété peut sembler critiquable; en effet, un même accroissement absolu représente un accroissement de rendement très différent suivant le niveau de cours auquel il s'applique. Il apparaît donc plus raisonnable de requérir l'indépendance au niveau, non de l'accroissement absolu, mais de l'accroissement relatif:

$$\forall \quad 0 < s < t < T : S(t)/S(s) \text{ est indépendant de } S(s) \quad .$$

Cette propriété est à la base du modèle brownien géométrique développé ci-dessous.

On considère à cet effet que le processus cours $\{S(t,\omega), t \in [0,T], \omega \in \Omega\}$ satisfait à l'équation différentielle stochastique

$$dS(t) = \delta \cdot S(t)dt + \sigma \cdot S(t)dw(t) \tag{4.7}$$

où $S(0) = S_0$ fixé;

δ et σ sont deux constantes;

w est un mouvement brownien standard (voir annexe 3).

Intuitivement, le bruitage additif par le mouvement brownien se fait ici, non plus directement sur le processus cours, mais sur le "rendement instantané" dS/S. La solution de l'équation différentielle (4.7) peut alors s'obtenir explicitement.

PROPRIÉTÉ 1.4

La solution de l'équation (4.7) est donnée par

$$S(t,\omega) = S(0) \cdot \exp((\delta - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma \cdot w(t,\omega)) \quad . \tag{4.8}$$

Démonstration

Ce résultat est une conséquence directe de la formule d'Ito qui constitue une des bases du calcul stochastique (annexe 3, propriété 6.2): si le processus ξ admet la différentielle stochastique

$$d\xi(t) = a(t)dt + b(t)dw(t),$$

et si f est une fonction de deux variables, continue, ainsi que ses dérivées $\frac{\partial f}{\partial t}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ alors le processus $f(t,\xi(t))$ admet la différentielle stochastique

$$df(t,\xi(t)) = \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot a(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} b^2(t)\right] dt + \frac{\partial f}{\partial x} b(t)dw(t) \; .$$

Appliquons cette formule au processus

$$J(t,\omega) = \ell n S(t,\omega).$$

Il vient

$$dJ(t) = \frac{1}{S(t)}\delta \cdot S(t)dt - \frac{1}{2}\frac{1}{S^2(t)} \cdot \sigma^2 S^2(t)dt + \frac{1}{S(t)} \cdot \sigma S(t)dw(t)$$

ou

$$dJ(t) = (\delta - \frac{1}{2}\sigma^2)dt + \sigma \cdot dw(t),$$

ce qui permet d'obtenir par intégration immédiate

$$J(t,\omega) = J(0) + (\delta - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma \cdot w(t,\omega).$$

En revenant au processus cours S,

$$\begin{aligned} S(t,\omega) &= \exp J(t,\omega) \\ &= S(0) \cdot \exp((\delta - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma \cdot w(t,\omega)). \end{aligned}$$

■

Les moments du processus S peuvent être obtenus facilement compte tenu de la nature de sa distribution.

PROPRIÉTÉ 1.5

(i) La variable aléatoire $S(t)/S(0)$ admet une distribution log-normale.

(ii)

$$\mathsf{E}S(t) = S_0 \cdot \exp(\delta t) \quad . \tag{4.9}$$

(iii)

$$Var\ S(t) = S_0^2 \cdot \exp(2\delta t) \cdot (\exp(\sigma^2 t) - 1) \quad . \tag{4.10}$$

Démonstration

Définissons au préalable la distribution log-normale. Si X est une variable aléatoire distribuée normalement de moyenne a et d'écart type b, alors la variable $Y = e^X$ est appelée variable log-normale de paramètres a et b.

On peut montrer (voir annexe 4, propriété 7.2) que les premiers moments de cette variable sont donnés par

$$\begin{aligned} \mathsf{E}Y &= \exp(a + \frac{b^2}{2}) \\ Var\ Y &= \exp(2a + b^2) \cdot (\exp(b^2) - 1). \end{aligned}$$

Il suffit alors de remarquer que la variable aléatoire

$$Y(t) = S(t)/S(0) = \exp((\delta - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma w(t))$$

est log-normale de paramètres

$$\begin{aligned} a &= (\delta - \frac{1}{2}\sigma^2)t \\ b &= |\sigma|\sqrt{t} \ , \end{aligned}$$

puisque la variable $w(t)$ est distribuée normalement, par définition du mouvement brownien.

En particulier

$$\begin{aligned} \mathbf{E}S(t) &= S_0 \cdot \mathbf{E}Y(t) = S_0 \cdot \exp((\delta - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \frac{1}{2}\sigma^2 \cdot t) \\ &= S_0 \cdot \exp \delta t. \end{aligned}$$

De même pour la variance. ■

REMARQUES

a) La propriété annoncée d'indépendance des accroissements relatifs par rapport au niveau atteint des cours est bien réalisée:

$$S(t)/S(s) = \exp((\delta - \frac{1}{2}\sigma^2)(t-s)) \cdot \exp(w(t) - w(s))$$

est bien indépendant de $S(s)$, puisque le processus w est à accroissements indépendants.

b) A l'instar du modèle de Poisson, la formule (4.9) montre qu'en moyenne, le rendement associé à ce processus est équivalent à une capitalisation continue à taux constant instantané δ.

L'analogie entre les modèles de Poisson et ce modèle brownien géométrique s'arrête là: si les trajectoires du modèle de Poisson sont des fonctions en escalier, celles de ce modèle sont des fonctions continues.

c) L'équation différentielle stochastique (4.7) régissant le modèle peut être mise sous la forme intégrale équivalente

$$S(t) = S_0 + \int_0^t S(s)dI(s) \tag{4.11}$$

où

$$I(s,\omega) = \delta \cdot s + \sigma \cdot w(s,\omega).$$

4.5 Variations diverses

Diverses variations de modélisation du processus cours ont été proposées dans la littérature, la plupart généralisant directement le modèle brownien géométrique.

Nous présenterons ci-dessous, sans intention exhaustive, quelques-unes de ces constructions, l'objectif étant de montrer les voies d'extension.

Nous proposerons au paragraphe 4.7. un modèle général englobant toutes les modélisations vues.

4.5.1 Modèle de Merton

Le modèle brownien géométrique conduit à supposer que les rendements des titres suivent une loi normale. Or les études statistiques semblent prouver que la distribution du rendement peut s'écarter sensiblement d'une distribution normale et peut notamment présenter des concentrations anormales dans la queue de la distribution. Une des explications à ce phénomène, présentée notamment par Merton (1976), repose sur l'hypothèse d'existence de sauts des cours boursiers à certains instants imprévisibles.

Techniquement, le modèle proposé revient à superposer une composante de Poisson (modélisant les sauts imprévisibles) et une composante brownienne (modélisant la tendance générale).

DÉFINITION 1.4

a) On considère un flux de rendement donné par un processus stochastique $\{I(t,\omega) : t \in [0,T], \omega \in \Omega\}$ admettant la représentation suivante

$$I(t,\omega) = I_1(t,\omega) + I_2(t,\omega)$$

où

$I_1(t,\omega) = \sum_{n|S_n(\omega)\leq t} i_n(\omega)$ est un processus de Poisson (voir définition 1.2);

$I_2(t,\omega) = \delta \cdot t + \sigma \cdot w(t,\omega)$ (modèle brownien géométrique);

I_1 et I_2 sont supposés indépendants.

On a en particulier

$$\mathsf{E}I(t) = \delta \cdot t + \bar{i}\lambda \cdot t = (\delta + \bar{i}\lambda) \cdot t \quad .$$

I_1 peut être interprétée comme la composante à saut du rendement ("plus-values surprises"). I_2 est la composante continue du rendement, bruitée par un mouvement brownien.

b) Le cours du titre obéit alors à l'équation différentielle stochastique

$$S(t) = S_0 + \int_0^t S(s^-)dI(s)$$

ou encore

$$dS(t) = \delta \cdot S(t^-)dt + \sigma \cdot S(t^-)dw(t) + S(t^-)dI_1(t).$$

La solution de cette équation s'obtient facilement par superposition multiplicative des solutions (4.4) et (4.8):

$$S(t,\omega) = S_0 \cdot \exp((\delta - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma \cdot w(t,\omega)) \cdot \prod_{n|S_n(\omega)\leq t} (1 + i_n(\omega)) \,. \qquad (4.12)$$

De même, compte tenu de l'indépendance des deux composantes stochastiques, il vient

$$\mathbf{E}S(t) = S_0 \cdot \exp((\delta + \bar{i} \cdot \lambda)t).$$

4.5.2 Modèles à volatilité non constante

Le modèle brownien géométrique suppose que le paramètre de volatilité σ est déterministe et constant. Différents auteurs ont mis en doute cette hypothèse et modifié en conséquence la modélisation.

Citons notamment les modèles suivants:

- *Modèle de Cox et Ross (1976)*

Le processus cours est supposé solution de l'équation

$$dS(t) = \delta \cdot S(t)dt + \sigma \cdot S^{\alpha/2}(t)dw(t)$$

où - $0 \leq \alpha < 2$

- δ et σ sont constants.

Le cas limite $\alpha = 2$ est le modèle brownien géométrique. La volatilité du rendement dans ce modèle n'est plus constante, mais égale à $\sigma^2 \cdot S^{\alpha-2}$; elle est une fonction inverse de la valeur du cours.

- *Modèle de Scott (1987)*

Dans ce modèle, la volatilité devient elle-même un processus stochastique; le processus cours et le processus volatilité obéissant au système d'équations différentielles stochastiques

$$\begin{aligned} dS(t) &= \delta \cdot S(t)dt + \sigma(t) \cdot S(t)dw_1(t) \\ d\sigma(t) &= \beta \cdot (\bar{\sigma} - \sigma(t))dt + \gamma \cdot dw_2(t) \end{aligned}$$

où w_1 et w_2 sont deux mouvements browniens standards.

- *Modèle de Johnson et Shanno (1987)*

Les processus cours et volatilité obéissent au système d'équations différentielles stochastiques

$$\begin{aligned} dS(t) &= \delta \cdot S(t)dt + \sigma(t) \cdot S^{\alpha}(t)dw_1(t) \\ d\sigma(t) &= \beta \cdot \sigma(t)dt + \gamma \cdot \sigma^{\beta}(t)dw_2(t) \end{aligned}$$

où - w_1 et w_2 sont deux mouvements browniens standards;
- $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$

- *Modèle de Hull et White (1985)*

Les processus cours S et variance $V = \sigma^2$ obéissent au système d'équations différentielles stochastiques

$$\begin{aligned} dS(t) &= \phi(S(t), V(t), t) \cdot S(t)dt + \sigma(t)S(t)dw_1(t) \\ dV(t) &= \mu(V(t), t) \cdot V(t)dt + \xi(V(t), t)V(t)dw_2(t) \end{aligned}$$

où w_1 et w_2 sont deux mouvements browniens standards.

4.6 Processus d'actualisation

La modélisation de l'évolution de la valeur d'un actif par un processus stochastique $\{S(t,\omega); t \in [0,T], \omega \in \Omega\}$, tel que vue précédemment, permet de générer d'une part un phénomème de capitalisation (valeur future d'une unité placée dans l'actif), d'autre part un phénomène d'actualisation (valeur actuelle à investir dans l'actif en vue d'obtenir une unité à une date future).

Dans un modèle déterministe, ces notions sont parfaitement inverses.

En utilisant par exemple la formule classique à intérêts composés (3.7), il vient

(i) pour le facteur de *capitalisation* de l'instant s vers l'instant t (avec $s \leq t \leq T$), noté $C_s(t)$:

$$C_s(t) = \exp \delta(t - s) \tag{4.13}$$

(ii) pour le facteur d'*actualisation* de l'instant t vers l'instant s (avec $s \leq t \leq T$), noté $\varphi_s(t)$:

$$\varphi_s(t) = \exp -\delta(t - s) = \frac{1}{C_s(t)} \quad . \tag{4.14}$$

Dans un modèle stochastique, ces facteurs peuvent également être définis; il est intéressant d'en étudier les propriétés, notamment en matière d'espérance mathématique. Nous obtiendrons à ce sujet un résultat d'irréversibilité, absent des modèles déterministes.

Nous nous placerons à cet effet dans le cas particulier du modèle brownien géométrique présenté au paragraphe 4.4. La forme explicite de la valeur de l'actif (4.8) nous conduit naturellement dans le cadre de ce modèle aux définitions suivantes:

(i) facteur de *capitalisation* de s vers t ($s \leq t \leq T$):

$$C_s(t) = \exp((\delta - \frac{1}{2}\sigma^2)(t - s) + \sigma(w(t,\omega) - w(s,\omega))) \tag{4.15}$$

(ii) facteur d'*actualisation* de t vers s $(s \leq t \leq T)$:

$$\varphi_s(t) = \exp(-(\delta - \frac{1}{2}\sigma^2)(t-s) - \sigma(w(t,\omega) - w(s,\omega))) \ . \tag{4.16}$$

On remarquera que ces formules généralisent naturellement les formules déterministes classiques (4.13) et (4.14) vues ci-dessus. En vue de comparer la structure de ces deux processus, nous nous intéresserons d'une part à l'équation différentielle stochastique dont ces processus sont solution, d'autre part à leur espérance mathématique.

En matière d'équations différentielles stochastiques, on a le résultat suivant.

PROPRIÉTÉ 1.6

Les facteurs de capitalisation et d'actualisation sont solution sur l'intervalle $[s,T]$ des équations

$$dC_s(t) = \delta \cdot C_s(t)dt + \sigma \cdot C_s(t)dw(t) \tag{4.17}$$

et

$$d\varphi_s(t) = -(\delta - \sigma^2) \cdot \varphi_s(t)dt - \sigma \cdot \varphi_s(t)dw(t) \ , \tag{4.18}$$

respectivement, avec

$$C_s(s) = \varphi_s(s) = 1 \ .$$

Démonstration

La relation (4.17) est une conséquence directe de la relation (4.15) du facteur de capitalisation et des relations (4.7) et (4.8). Quant au facteur d'actualisation, il vient en différentiant, et en appliquant la formule d'Ito

$$d\varphi_s(t) = (\frac{1}{2}\sigma^2 - \delta)\cdot\varphi_s(t)dt + \exp(-(\delta - \frac{1}{2}\sigma^2)(t-s))d(\exp -\sigma(w(t,\omega) - w(s,\omega)))$$

et

$$d(\exp -\sigma(w(t,\omega) - w(s,\omega))) = \frac{1}{2}\sigma^2 \cdot \exp -\sigma(w(t,\omega) - w(s,\omega))dt \ .$$

$$-\sigma \cdot (\exp -\sigma(w(t,\omega) - w(s,\omega))) \cdot dw(t).$$

En substituant, il vient

$$\begin{aligned} d\varphi_s(t) \ = \ & (\frac{1}{2}\sigma^2 - \delta) \cdot \varphi_s(t)dt + \frac{1}{2}\sigma^2 \cdot \exp(-(\delta - \frac{1}{2}\sigma^2)(t-s)) \\ & \times \exp -\sigma(w(t,\omega) - w(s,\omega))) \cdot dt \end{aligned}$$

$$-\sigma \cdot \exp(-(\delta - \frac{1}{2}\sigma^2)(t-s)) \cdot \exp -\sigma(w(t,\omega) - w(s,\omega))dw(t)$$

ou

$$\begin{aligned} d\varphi_s(t) &= (\frac{1}{2}\sigma^2 - \delta) \cdot \varphi_s(t)dt + \frac{1}{2}\sigma^2 \cdot \varphi_s(t)dt - \sigma \cdot \varphi_s(t)dw(t) \\ &= (\sigma^2 - \delta)\varphi_s(t)dt - \sigma\varphi_s(t)dw(t) \end{aligned}$$

■

CONCLUSION 1.1

La comparaison des équations (4.17) et (4.18) montre que
a) dans un modèle déterministe ($\sigma \equiv 0$), l'inversion du temps se traduit simplement par une inversion des signes des coefficients de l'équation:

$$\begin{aligned} dC_s(t) &= \delta \cdot C_s(t)dt \\ d\varphi_s(t) &= -\delta \cdot \varphi_s(t)dt \ . \end{aligned}$$

b) dans le modèle stochastique, l'inversion du temps se traduit non seulement par l'inversion des signes des coefficients de l'équation, mais également par l'apparition d'un terme complémentaire, lié à la volatilité σ^2.

Cette même perturbation apparaît en matière de moyenne des processus, comme le montre la propriété suivante.

PROPRIÉTÉ 1.7

Les facteurs de capitalisation et d'actualisation admettent sur l'intervalle $[s, T]$, les moyennes

$$\mathbf{E}C_s(t) = \exp(\delta \cdot (t-s)) \tag{4.19}$$

et

$$\mathbf{E}\varphi_s(t) = \exp(-(\delta - \sigma^2) \cdot (t-s)) \ , \tag{4.20}$$

respectivement.

Démonstration

Ces relations se démontrent selon la même méthode que celle utilisée pour la propriété 1.5.

En effet, les variables aléatoires $C_s(t)$ et $\varphi_s(t)$ (s et t fixés), compte tenu de leur définition admettent une distribution log-normale, de paramètres

$$\begin{aligned} a &= (\delta - \frac{\sigma^2}{2})(t-s) \\ b &= |\sigma|\sqrt{t-s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a' &= (\frac{\sigma^2}{2} - \delta)(t-s) \\ b' &= |\sigma|\sqrt{t-s} \end{aligned}$$

respectivement pour $C_s(t)$ et $\varphi_s(t)$. Il en résulte

$$\begin{aligned} \mathrm{E}C_s(t) = \exp(a + \frac{b^2}{2}) &= \exp((\delta - \frac{\sigma^2}{2})(t-s) + \frac{\sigma^2}{2}(t-s)) \\ &= \exp(\delta(t-s)) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\varphi_s(t) = \exp(a' + \frac{b'^2}{2}) &= \exp((\frac{\sigma^2}{2} - \delta)(t-s) + \frac{\sigma^2}{2}(t-s)) \\ &= \exp(-(\delta - \sigma^2)(t-s)). \end{aligned}$$

■

CONCLUSION 1.2

L'actualisation moyenne se fait à un taux plus faible que la capitalisation moyenne.

Le taux moyen instantané δ est pénalisé par le terme σ^2 de volatilité de l'actif.

Les conclusions 1.1 et 1.2 ainsi obtenues, qui peuvent être baptisées propriété d'irréversibilité du phénomène d'actualisation, ne constituent nullement un apanage du modèle brownien géométrique considéré ici.

Elles constituent en réalité la marque des modèles aléatoires et seront généralisées dans le modèle stochastique général de semi-martingales étudié au paragraphe 4.7.

4.7 Modèle général de semi-martingales

4.7.1 Introduction

Différents modèles stochastiques d'évolution d'un actif ont été présentés; certaines parentés ont déjà été signalées entre plusieurs de ces modèles, notamment au niveau de l'équation d'évolution qui les régit, qu'il s'agisse des équations différentielles classiques (3.6) et (3.8), et de l'équation intégrale (3.10) pour les modèles déterministes, ou des modèles stochastiques (4.4), (4.7) ou (4.12).

Il est possible de généraliser ces différents modèles grâce à la théorie des semi-martingales, en introduisant le modèle le plus général pour lequel une équation de capitalisation de la forme

$$S(t) = S(0) + \int_0^t S(s^-)dI(s)\ ,$$

où I, baptisé flux de rendement, est un processus adéquat, a encore un sens raisonnable.

La théorie générale des processus stochastiques nous enseigne que la classe maximale de processus pour laquelle la notion d'intégrale peut encore se voir attribuer un sens est constituée des semi-martingales. Nous étudierons ce modèle général dans le présent paragraphe, et généraliserons ainsi l'ensemble des modèles vus précédemment.

Nous renvoyons à l'annexe 5 pour les éléments théoriques relatifs aux semi-martingales et à l'intégration stochastique générale.

En vue d'introduire ce modèle général, considérons le modèle brownien géométrique vu au paragraphe 4.4.

L'équation stochastique de structure (4.7) peut être réécrite

$$S(t) = S(0) + \int_0^t S(s)dI(s), \tag{4.21}$$

où le processus flux I est défini par

$$I(t,\omega) = \delta \cdot t + \sigma \cdot w(t,\omega).$$

Ce flux admet donc une décomposition additive

$$I(t,\omega) = I_d(t) + I_a(t,\omega) \ ,$$

où

(i) I_d est une fonction monotone non décroissante (donc à variation bornée);

(ii) I_a est une martingale.

Cette décomposition additive du processus flux qui régit l'équation de structure (4.21), en une partie à variation bornée et une composante martingale, est à la base de la généralisation par la théorie des semi-martingales.

Ceci motive la définition suivante.

DÉFINITION 1.5

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace de probabilité, muni d'une filtration $\{\mathcal{F}_s, 0 \leq s \leq T\}$. Un flux I sur l'espace filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}, \{\mathcal{F}_s\})$ est une semi-martingale spéciale sur cet espace, satisfaisant:

(i) les sauts de I sont à valeurs dans un compact de $(-1, 1)$,

(ii) les sauts de I sont en nombre fini sur tout compact,

(iii) la partie continue à variation finie de I est croissante,

(iv) $I(0) = 0$.

Un flux étant supposé une semi-martingale spéciale, admet la décomposition unique

$$I(t,\omega) = V(t,\omega) + M(t,\omega) \ , \tag{4.22}$$

où $V(t,\omega)$ est un processus à variation finie, prévisible et localement intégrable, et $M(t,\omega)$ est une martingale locale nulle en $t = 0$.

D'autre part, rappelons que tous ces processus sont supposés cad-lag, adaptés et donc optionnels.

On peut décomposer les processus V et M.

Le processus V étant à variation finie, on peut lui appliquer, trajectoire par trajectoire, la décomposition de Lebesgue:

$$V(t,\omega) = V^c(t,\omega) + V^s(t,\omega) + V^d(t,\omega) ,$$

où V^c est la partie absolument continue, V^s est la partie continue singulière, V^d est la partie discrète à sauts.

On supposera toujours ici V^s identiquement nul. On posera alors

a) $V^c(t,\omega) = \int_0^t \delta(s,\omega)ds$

Le processus dérivée δ p.s. non négatif par l'hypothèse (iii), défini à un ensemble de mesure nulle près sur toute trajectoire, et étendu pour continuité à droite, représentera le *taux de rendement instantané stochastique.*

b) $V^d(t,\omega) = \sum_{k|T_k \leq t} s_k(\omega)$

où

(b1) $0 = T_0 < T_1 \ldots < T_n \ldots$ est une suite de temps d'arrêt prévisibles, de graphes disjoints, puisque V est supposé prévisible (on supposera le plus souvent ces temps déterministes);

(b2) les sauts du processus sont notés $s_k(\omega)$, et seront appelés *taux impulsionnels stochastiques.* La somme

$$V(t,\omega) = \int_0^t \delta(s,\omega)ds + \sum_{k|T_k \leq t} s_k(\omega)$$

représente le *trend*, ou partie à variation lente et prévisible du flux.

Quant au processus M, il modélise le bruit, ou partie à variation rapide, résultant de l'accumulation d'effets nombreux et chaotiques sur l'évolution du rendement.

Etant une martingale locale, ce processus admet également une décomposition additive

$$M(t,\omega) = M^c(t,\omega) + M^d(t,\omega)$$

où

a) $M^c(t,\omega)$ représente la partie martingale continue du flux, et sera appelée *bruit continu*;

b) $M^d(t,\omega)$ est une somme compensée de sauts et sera appelé *bruit discret.* Les sauts étant bornés et en nombre fini, sur tout compact, on pourra écrire

$$M^d(t,\omega) = A(t,\omega) - A^p(t,\omega)$$

où

(b1) $A(t,\omega) = \sum_{j|S_j \leq t} m_j(\omega)$.

Les $0 = S_0 \leq S_1 \ldots < S_n < S_{n+1} \ldots$ étant une suite de temps d'arrêt, choisis totalement inaccessibles. Les sauts m_j sont appelés *bruits impulsionnels stochastiques.*

(b2) A^p est la projection prévisible duale de A, et est un processus continu à variation finie, appelé *compensateur du bruit.*

Un flux de rendement pourra donc se décomposer en 4 parties, et se noter

$$I(t,\omega) = \int_0^t \delta(s,\omega)ds + \sum_{j|T_j \leq t} s_j(\omega) + M^c(t,\omega) + \left(\sum_{j|S_j \leq t} m_j(\omega) - A^p(t,\omega) \right). \tag{4.23}$$

Ces 4 parties peuvent s'interpréter financièrement de la façon suivante:

a) $\int \delta(s,\omega)ds$ représente le *trend* des taux de rendement;

b) $M^c(t,\omega)$ représente le bruit agissant sur ces taux;

c) $\sum_{j|T_j \leq t} s_j(\omega)$ représente une suite de plus- ou moins-values affectant l'actif à des époques prévisibles;

d) $\sum_{j|S_j \leq t} m_j(\omega)$ représente une suite de plus- ou moins-values affectant l'actif à des instants totalement inaccessibles, et compensées par le processus A^p.

Ce type de flux intègre donc à la fois des revenus et des plus-values. Les modèles précédemment étudiés s'obtiennent facilement comme cas particulier.

A titre d'exemple:

a) *modèle déterministe* (paragraphe 3.2.3):

$$\delta(s,\omega) = \delta(s)$$

$$s_j(\omega) = i_j \quad .$$

Les temps d'arrêt prévisibles $\{T_j(\omega)\}$ sont des temps déterministes;

$$M^c = 0$$

$$m_k = 0, A^p = 0 \quad .$$

b) *modèle brownien géométrique* (paragraphe 4.4):

$$\delta(s,\omega) = \delta$$

$$M^c(t,\omega) = \sigma w(t,\omega)$$

$$s_j = m_j = 0 \quad .$$

4.7.2 Actif stochastique

On s'intéresse à l'équation de capitalisation

$$S(t) = S(0) + \int_0^t S(s^-)dI(s),$$

où I est une semi-martingale, de forme (4.23):

$$I(t,\omega) = \int_0^t \delta(s,\omega)ds + \sum_{j|T_j\leq t} s_j(\omega) + M^c(t,\omega) + \left(\sum_{j|S_j\leq t} m_j(\omega) - A^p(t,\omega)\right) .$$

L'actif, solution de cette équation différentielle stochastique, est donné par le théorème suivant.

THÉORÈME 1.2

Il existe une et une seule semi-martingale, solution de l'équation de capitalisation, appelée exponentielle du flux, et donnée par la formule

$$S(t) = S(0)\cdot \exp\{I(t) - \frac{1}{2} < M^c, M^c >_t\} \cdot \prod_{0<s\leq t} (1+\Delta I_s)e^{-\Delta I_s} , \qquad (4.24)$$

où on note $\Delta I_s = I(s) - I(s-0)$, les sauts du flux ($\Delta I_{T_j} = s_j(\omega)$ et $\Delta I_{S_j} = m_j(\omega)$).

Démonstration

(i) *Existence*
Posons

$$\begin{aligned} K(t) &= I(t) - \frac{1}{2} < M^c, M^c >_t \\ L(t) &= \prod_{0<s\leq t} (1+\Delta I_s)\cdot e^{-\Delta I_s}. \end{aligned}$$

Remarquons que le processus L est bien défini puisque le flux est supposé n'avoir qu'un nombre fini de sauts sur tout compact.

La solution proposée est de la forme

$$S(t) = S(0)\cdot F(K(t), L(t)) \text{ avec } F(x,y) = y\cdot e^x$$

et est donc une semi-martingale.

Appliquons la formule d'Ito à 2 dimensions, pour les semi-martingales:

$$\begin{aligned} F(X_t^1, X_t^2) &= F(X_0^1, X_0^2) + \sum_{i=1}^2 \int_{]0,t]} \frac{\partial F}{\partial x^i}(X_{s-}^1, X_{s-}^2)dX_s^i \\ &\quad + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^2 \int_{]0,t]} \frac{\partial F}{\partial x^i \partial x^j}(X_{s-}^1, X_{s-}^2)\, d < X^{ic}, X^{jc} >_s \\ &\quad + \sum_{0<s\leq t} (F(X_s^1, X_s^2) - F(X_{s-}^1, X_{s-}^2) - \sum_{i=1}^2 \frac{\partial F}{\partial x^i}(X_{s-}^1, X_{s-}^2)\cdot \Delta X_s^i) \end{aligned}$$

En appliquant cette formule à la solution proposée,

$$\begin{aligned} S(t) &= S(0) + \int_0^t S(s^-)dK(s) + \int_0^t e^{K(s^-)}dL(s) + \frac{1}{2}\int_0^t S(s^-)d < K^c, K^c >_s \\ &+ \sum_{0<s\leq t} (S(s) - S(s^-) - S(s^-)\Delta K_s - e^{K(s^-)} \cdot \Delta L_s) \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} S(t) &= S(0) + \int_0^t S(s^-)dI(s) - \frac{1}{2}\int_0^t S(s^-)d < M^c, M^c >_s + \int_0^t e^{K(s^-)}dL(s) \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t S(s^-)d < K^c, K^c >_s \\ &+ \sum_{0<s\leq t} (S(s) - S(s^-) - S(s^-)\Delta K_s - e^{K(s^-)}\Delta L_s) \, . \end{aligned}$$

Or $K^c(t) = I^c(t) = M^c(t)$, car $< M^c, M^c >$ est un processus croissant, et

$$\int_0^t e^{K(s^-)}dL(s) = \sum_{0<s\leq t} e^{K(s^-)}\Delta L_s,$$

puisque les trajectoires du processus L sont en escalier.

D'autre part, lors des discontinuités du flux I, on a

$$S(s) = S(s^-) \cdot (1 + \Delta I_s) = S(s^-) \cdot (1 + \Delta K_s).$$

On obtient donc finalement

$$S(t) = S(0) + \int_o^t S(s^-)dI(s),$$

et S est donc bien solution de l'équation de capitalisation.

(ii) *Unicité*

Rappelons que si I^* est un flux déterministe à variation bornée, il existe une et une seule solution à l'équation intégrale (théorème 1.1)

$$S^*(t) = S(0) + \int_0^t S^*(s^-)dI^*(s) \, .$$

Ce résultat se généralise immédiatement si I est un processus à variation finie, puisque dans ce cas, l'intégrale stochastique se calcule de manière classique, trajectoire par trajectoire.

Il suffit donc de montrer l'unicité lorsque le flux comprend une partie martingale locale continue. Soit alors $\bar{C}$ une solution de l'équation de capitalisation. Posons

$$\bar{K}(t) = M^c(t) - \frac{1}{2} < M^c, M^c >_t$$

et

$$\bar{L}(t) = e^{-\bar{K}(t)} \cdot \bar{C}(t) = F(-\bar{K}(t), \bar{C}(t)) \text{ où } F(x,y) = ye^x.$$

Montrons que le processus $\bar{L}$ est solution d'une équation de capitalisation dont le flux est à variation finie; son unicité (et donc celle de $\bar{C}$) sera ainsi assurée. En appliquant à nouveau la formule d'Ito à 2 dimensions, on a

$$\begin{aligned}\bar{L}(t) &= \bar{L}(0) + \int_0^t -\bar{L}(s^-)d\bar{K}(s) + \int_0^t e^{-\bar{K}(s^-)}d\bar{C}(s) \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_0^t \bar{L}(s^-)d < \bar{K}^c, \bar{K}^c >_s \\ &\quad - \int_0^t e^{-\bar{K}(s^-)}d < \bar{K}^c, \bar{K}^c >_s \\ &\quad + \sum_{0<s\leq t} (\bar{L}(s) - \bar{L}(s^-)\Delta\bar{K}_s - e^{\bar{K}(s^-)}\bar{C}_s).\end{aligned}$$

Or a) $d\bar{C}(s) = \bar{C}(s^-)dI(s)$;
b) $d\bar{K}(s) = dM^c(s) - \frac{1}{2}d < M^c, M^c >_s$;
c) $I^c(s) = M^c(s) = \bar{K}^c(s)$, puisque $< M^c, M^c >$ est croissant;
d) $\Delta\bar{K}_s = 0$ puisque $\bar{K}$ est continu.
D'autre part, par la formule $d[(H \cdot X)^c, Y] = Hd[X^c, Y]$, on a

$$d < \bar{K}^c, \bar{C}^c >_s = d < I^c, \bar{C}^c >_s = \bar{C}(s^-)d < I^c, I^c >_s .$$

En remplaçant, on obtient finalement

$$\begin{aligned}\bar{L}(t) &= \bar{L}(0) + \int_0^t e^{-\bar{K}(s^-)}\bar{C}(s^-)dI(s) - \int_0^t \bar{L}(s^-)dM^c(s) \\ &= \bar{L}(0) + \int_0^t \bar{L}(s^-)dI(s) - \int_0^t \bar{L}(s^-)dM^c(s)\end{aligned}$$

ou

$$\bar{L}(t) = \bar{L}(0) + \int_0^t \bar{L}(s^-)d(I(s) - M^c(s))$$

et $I - M^c$ est bien un processus à variation finie.
L'unicité de $\bar{L}$ et de $\bar{C}$ en résulte. ∎

En tenant compte de la forme (4.23) du flux, l'actif, solution, peut encore s'écrire

$$S(t,\omega) = S(0)\exp\left(\int_0^t \delta(s,\omega)ds + M^c(t,\omega) - \frac{1}{2} < M^c, M^c >_t - A^p(t,\omega)\right)$$

$$\times \exp\left(\sum_{j|T_j\leq t} s_j(\omega) + \sum_{j|S_j\leq t} m_j(\omega) - \sum_{0<s\leq t}\Delta I_s\right)\prod_{0<s\leq t}(1+\Delta I_s).$$

Or les discontinuités du flux sont précisément les sauts $\{s_j\}$ et $\{m_j\}$. On a donc finalement

$$S(t,\omega) = S(0)\exp\left(\int_0^t \delta(s,\omega)ds + M^c(t,\omega) - \frac{1}{2} < M^c, M^c >_t\right) \prod_{j|T_j\leq t} (1+s_j)$$

$$\times \left(\prod_{j|S_j\leq t} (1+m_j)\cdot \exp -A^p(t,\omega)\right). \tag{4.25}$$

CAS PARTICULIERS

a) *Modèle déterministe*:

$$I(t) = \int_0^t \delta(s)ds + \sum_{j|T_j\leq t} s_j$$

et

$$S(t) = S(0)\exp\int_0^t \delta(s)ds \prod_{j|T_j\leq t} (1+s_j)\ .$$

b) *Modèles continus*:

Lorsque le bruit est continu, le compensateur disparaît, et on a

$$S(t) = S(0)\exp\left(\int_0^t \delta(s,\omega)ds + M^c(t,\omega) - \frac{1}{2} < M^c, M^c >_t\right) \prod_{j|T_j\leq t} (1+s_j).$$

Lorsque de plus, le *trend* est également continu, on a

$$\begin{aligned} S(t) &= S(0)\exp\left(\int_0^t \delta(s,\omega)ds + M^c(t,\omega) - \frac{1}{2} < M^c, M^c >_t\right) \\ &= S(0)\exp I(t)\cdot \exp -\frac{1}{2} < M^c, M^c >_t \ . \end{aligned}$$

Rappelons que pour un modèle déterministe continu, on a

$$S(t) = S(0)\exp I(t).$$

c) *Modèle wienérien*:

Il s'agit d'un modèle continu, pour lequel on a

$$\begin{aligned} \delta(s,\omega) &= \delta(s) \\ M(t) &= \int_0^t \sigma(s)dw(s), \end{aligned}$$

où w est un processus wienérien. Dans ce cas, on a

$$< M, M >_t = \int_0^t \sigma^2(s)ds,$$

et donc

$$\begin{aligned} S(t) &= S(0) \cdot \exp\left(\int_0^t \delta(s)ds + \int_0^t \sigma(s)dw(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2(s)ds\right) \\ &= S(0) \cdot \exp \int_0^t \delta(s) - \frac{\sigma^2(s)}{2}ds \cdot \exp \int_0^t \sigma(s)dw(s). \end{aligned}$$

Ce modèle généralise dans un cadre non stationnaire le modèle brownien géométrique vu au paragraphe 4.4.

La solution obtenue (4.25) jouit des propriétés suivantes.

PROPRIÉTÉ 1.8 (propriétés probabilistes)

a) L'actif S est une semi-martingale spéciale.
b) Si le flux est un processus à variation finie (une martingale locale), l'actif est un processus à variation finie (une martingale locale). En particulier, si M est une martingale locale, le processus

$M^*(t,\omega) = \exp(M^c(t,\omega) - \frac{1}{2} < M^c, M^c >_t)$ est une martingale locale continue.

Le processus $A^*(t,\omega) = \prod_{j|S_j \leq t}(1+m_j) \cdot \exp -A^p(t,\omega)$ est une martingale locale, somme compensée de sauts.

Démonstration

Ces propriétés résultent directement de la relation

$$S(t) = S(0) + \int_0^t S(s^-)dI(s).$$

a) La solution S est une intégrale stochastique d'un processus prévisible localement borné, par rapport à une semi-martingale spéciale I, et est donc spéciale.
b) L'intégrale stochastique par rapport à une martingale locale ou un processus à variation finie définit encore un processus, martingale locale ou à variation finie.

PROPRIÉTÉ 1.9 (propriétés des trajectoires)

a) L'actif S admet des trajectoires continues à droite, limitées à gauche.
b) Sur toutes les trajectoires, l'actif solution est une fonction strictement positive.

Ces propriétés résultent directement de la forme de la solution, ainsi que du domaine de variation des sauts du flux, inclus dans $(-1,1)$.

PROPRIÉTÉ 1.10 (propriété de décomposition)

La solution S admet une décomposition multiplicative

$$S(t) = S(0) \cdot S_1(t) \cdot S_2(t)$$

où S_1 est un processus à variation finie, S_2 est une martingale locale.

Démonstration

Il suffit de remarquer que

$$S(t) = S(0) \cdot (\exp \int_0^t \delta(s,\omega)ds \cdot \prod_{j|T_j \leq t} (1+s_j)) \cdot (\exp\{M^c(t,\omega) - \frac{1}{2} < M^c, M^c >_t - A^p(t,\omega)\} \cdot \prod_{j|S_j \leq t} (1+m_j))$$

et de conclure à l'aide de la propriété 1.8.

Le processus $S_1(t) = \exp \int_0^t \delta(s,\omega)ds \cdot \prod_{j|T_j \leq t}(1+s_j)$, qui est une généralisation immédiate en univers aléatoire, de la formule obtenue dans le modèle déterministe est l'effet du *trend*, autour duquel va varier la véritable trajectoire de S (*variation principale*).

Le processus, $S_2(t) = \exp\{M^c(t,\omega) - \frac{1}{2} < M^c, M^c >_t - A^p(t,\omega)\} \cdot \prod_{j|S_j \leq t}(1+m_j)$, qui est une perturbation aléatoire multiplicative du processus S_1, est l'effet du bruit (*variation secondaire*).

Le caractère de martingale locale du processus S_2 illustre son rôle de perturbation autour de S_1.

REMARQUE

La présence, dans l'équation de capitalisation, de la limite à gauche $S(s^-)$ comme intégrand, plutôt que du processus $S(s)$ lui-même, se justifie à la fois d'un point de vue financier et technique.

a) *Justification financière*

Lorsqu'on utilise la limite à gauche, on a en un point t_0 de discontinuité du flux d'amplitude s_0

$$S(t_0) = S(t_0^-) \cdot (1 + s_0).$$

L'amplitude s_0 s'interprète donc comme un taux impulsionnel qui s'applique sur l'actif tel qu'il existe immédiatement avant cet apport. L'emploi de la limite à gauche permet donc d'interpréter les sauts du flux comme taux impulsionnels.

b) *Justification technique*

Dans un modèle déterministe, on pouvait concevoir l'équation

$$S(t) = S(0) + \int_0^t S(s)dI(s) \tag{4.26}$$

dont la solution est donnée par

$$S(t) = S(0) \cdot \exp(I^c(t)) \cdot \prod_{k|T_k \leq t} (1 + \frac{s_k}{1 - s_k}).$$

En revanche, dans un modèle de semi-martingale, l'équation (4.26) n'a plus de sens, puisque le processus S n'est généralement pas prévisible. L'emploi de la limite à gauche permet en fait de rendre l'intégrand prévisible.

Une autre manière, en univers aléatoire, de rendre l'intégrand prévisible serait de considérer l'équation intermédiaire

$$S^*(t) = S(0) + \int_0^t {}^pS^*(s)dI(s)$$

où ${}^pS^*$ est la projection prévisible du processus S.

Dans ce cas, l'impulsion se calculerait sur l'actif après l'apport si celui-ci est prévisible (sauts du *trend*); l'impulsion se calculerait sur l'actif avant l'apport si celui-ci est totalement inaccessible (sauts du bruit), et on aurait la solution

$$S^*(t) = S(0) \cdot \exp(\int_0^t \delta(s,\omega)ds + M^c(t,\omega) - \frac{1}{2} < M^c, M^c >_t) \cdot \prod_{k|T_k \leq t} (1 + \frac{s_k}{1 - s_k})$$

$$\cdot (\prod_{k|S_k \leq t} (1 + m_k) \cdot \exp - A^p(t,\omega)).$$

4.7.3 Actualisation stochastique

Soient s et t, 2 instants tels que $s \leq t$.

Si S désigne le processus de capitalisation (4.24), on a

$$\begin{aligned} S(t) &= S(s) \cdot \exp\{I(t) - I(s) + \frac{1}{2} < M^c, M^c >_s - \frac{1}{2} < M^c, M^c >_t\} \\ &\quad \times \prod_{s<r\leq t} (1 + \Delta I_r)e^{-\Delta I_r} \end{aligned}$$

Ceci justifie la définition suivante, qui généralise l'expression (4.15).

DÉFINITION 1.6

Le facteur de *capitalisation* de s vers t $(s \leq t)$, est le processus $C_s(t)$, donné par

$$C_s(t) = \exp\{I(t) - I(s) + \frac{1}{2} < M^c, M^c >_s - \frac{1}{2} < M^c, M^c >_t\} \cdot \prod_{s<r\leq t} (1 + \Delta I_r)e^{-\Delta I_r} \tag{4.27}$$

Ce facteur jouit des propriétés immédiates suivantes.

PROPRIÉTÉ 1.11

(i) Le processus $C_s(\cdot)$, (s fixé), est solution de l'équation différentielle stochastique

$$dC_s(t) = C_s(t^-)dI(t) \qquad t > s$$

$$C_s(s) = 1$$

(ii) Le processus C_s admet une décomposition multiplicative

$$C_s(t) = C_s^{(1)}(t) \cdot C_s^{(2)}(t)$$

où $C_s^{(1)}(t)$ est un *processus à variation finie*, issu exclusivement de l'influence du *trend* :

$$C_s^{(1)}(t) = \exp \int_s^t \delta(t,\omega)dr \cdot \prod_{j|s<T_j\leq t} (1+s_j) ,$$

et $C_s^2(t)$ est une *martingale locale*, issue exclusivement de l'influence du bruit:

$$C_s^{(2)}(t) = \exp\{M^c(t,\omega) - M^c(s,\omega) + \frac{1}{2} < M^c, M^c >_s - \frac{1}{2} < M^c, M^c >_t$$

$$+A^p(s,\omega) - A^p(t,\omega)\} \prod_{j|s<S_j\leq t} (1+m_j) .$$

Le processus $C_s(t)$ permet de modéliser l'actualisation vers le futur; on peut également définir un processus d'actualisation vers le passé (voir généralisation de l'expression (4.16)).

DÉFINITION 1.7

Le facteur d'*actualisation* de t vers s ($t \geq s$), est le processus $\varphi_s(t)$, donné par

$$\varphi_s(t) = \frac{1}{C_s(t)} = \exp\{I(s) - I(t) + \frac{1}{2} < M^c, M^c >_t$$
$$-\frac{1}{2} < M^c, M^c >_s\} \cdot \prod_{s<r\leq t} \frac{1}{1+\Delta I_r} \cdot e^{\Delta I_r} \qquad (4.28)$$

Remarquons que ce processus est bien défini, puisque le processus solution du problème de capitalisation est toujours strictement positif (propriété 1.9).

a) *Modèles continus*

Examinons d'abord les propriétés de ce facteur $\varphi_s(t)$, lorsque le flux est continu (i.e. $I(t,\omega) = \int_0^t \delta(s,\omega)ds + M^c(t,\omega)$).

Dans un modèle continu déterministe, l'inversion du temps se traduit au niveau de l'équation différentielle par un simple changement de signe:

$$dC_s(t) = C_s(t)dI(t)$$

et

$$d\varphi_s(t) = -\varphi_s(t)dI(t) .$$

Cette réversibilité ne joue plus dans un modèle stochastique continu (voir propriété 1.6). On a:

PROPRIÉTÉ 1.12

Lorsque le flux est une semi-martingale continue, le facteur d'actualisation est solution de l'équation différentielle stochastique

$$d\varphi_s(t) = -\varphi_s(t)dI(t) + \varphi_s(t)d < M^c, M^c >_t \qquad (4.29)$$

Démonstration

Il suffit d'appliquer la formule d'Ito à 1 dimension à la fonction $F(x) = \frac{1}{x}$, de classe $C^2(\mathbf{R}_0^+)$:

$$\varphi_s(t) = F(C_s(t)) = F(C_s(s)) + \int_{(s,t]} -\frac{1}{C_s^2(r)}dC_s(r) + \frac{1}{2}\int_{(s,t]} \frac{2}{C_s^3(r)}d[C_s^c, C_s^c]_r$$

Or: a) $dC_s(r) = C_s(r)dI(r)$

b) $$\begin{aligned} d[C_s^c, C_s^c]_r &= C_s^2(r)d[I^c, I^c]_r \\ &= C_s^2(r)d < M^c, M^c >_r \text{ (puisque } I \text{ est continu).} \end{aligned}$$

En remplaçant,

$$\varphi_s(t) = 1 + \int_{(s,t]} -\frac{1}{C_s(r)}dI(r) + \int_{(s,t]} \frac{1}{C_s(r)}d < M^c, M^c >_r$$

ou

$$\varphi_s(t) = 1 + \int_{(s,t]} -\varphi_s(r)dI(r) + \int_{(s,t]} \varphi_s(r)d < M^c, M^c >_r,$$

c'est-à-dire, sous forme différentielle

$$d\varphi_s(t) = -\varphi_s(t)dI(t) + \varphi_s(t)d < M^c, M^c >_t .$$

REMARQUE

La partie martingale locale continue induit donc lors de l'inversion du temps, un terme complémentaire dans l'équation différentielle stochastique d'actualisation. Cette équation peut se mettre sous la forme

$$d\varphi_s(t) = -\varphi_s(t)d(V(t) - < M^c, M^c >_t) - \varphi_s(t)dM^c(t).$$

Le processus $U(t) = V(t) - < M^c, M^c >_t$ sera appelé *trend hors risque*; ce processus généralise les taux hors risque $\delta - \sigma^2$, du modèle brownien géométrique. Le *trend* hors risque apparaît également dans la décomposition multiplicative du facteur φ:

PROPRIÉTÉ 1.13

Lorsque le flux est une semi-martingale continue, le processus d'actualisation en $s = 0, \varphi_0(\cdot)$, admet la décomposition multiplicative suivante:

$$\varphi_0(t) = \varphi_0^{(1)}(t) \cdot \varphi_0^{(2)}(t)$$

où

(i) $\varphi_0^{(1)}(t) = \exp(-U(t)) = \exp(-\int_0^t \delta(s,\omega)ds + < M^c, M^c >_t)$
est un processus à variation finie continu (*variation principale*);

(ii) $\varphi_0^{(2)}(t) = \exp(-M^c(t) - \frac{1}{2} < M^c, M^c >_t)$
est une martingale locale continue (*variation secondaire*).

Démonstration

Dans le cas continu, le facteur d'actualisation est donné par

$$\varphi_0(t) = \varphi(t) = \exp\left\{\frac{1}{2} < M^c, M^c >_t - M^c(t) - \int_0^t \delta(s,\omega)ds\right\}.$$

(i) Montrons d'abord que la décomposition naturelle suivante, analogue à celle du facteur de capitalisation, ne convient pas:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \exp\left\{-\int_0^t \delta(s,\omega)ds\right\} \cdot \exp\left\{\frac{1}{2} < M^c, M^c >_t - M^c(t)\right\} \\ &= \psi_1(t) \cdot \psi_2(t) = \frac{1}{C_0^1(t)} \cdot \frac{1}{C_0^2(t)} \end{aligned}$$

Le processus ψ_1 est bien à variation finie.

Mais le processus ψ_2 n'est pas une martingale locale. Pour ce, considérons l'équation

$$Z(t) = 1 + \int_0^t Z(s)d(-M^c(s)).$$

Le processus $-M^c$ étant une martingale locale continue, il en résulte que Z est également une martingale locale continue.

D'autre part, Z est solution d'une équation de capitalisation à flux égal à $-M^c$, et le théorème 1.2, implique:

$$\begin{aligned} Z(t) &= \exp\left\{-M^c(t) - \frac{1}{2} < -M^c, -M^c >_t\right\} \\ &= \exp\left\{-M^c(t) - \frac{1}{2} < M^c, M^c >_t\right\}. \end{aligned}$$

Or

$$\psi_2(t) = \exp\left\{\frac{1}{2} < M^c, M^c >_t - M(t)\right\} = Z(t) \cdot \exp\{< M^c, M^c >_t\}$$

$Z(t)$ étant une martingale locale, et $\exp\{< M^c, M^c >_t\}$ étant un processus croissant, ψ_2 n'est généralement pas une martingale locale.
(ii) Le processus Z conduit naturellement à la décomposition souhaitée. En effet,

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= Z(t) \cdot \left(\exp\left\{-\int_0^t \delta(s,\omega)ds\right\} \cdot \exp\{< M^c, M^c >_t\}\right) \\ &= \varphi^2(t) \cdot \varphi^1(t), \end{aligned}$$

et φ^2 est bien une martingale locale, $\varphi^1(t) = \exp\left\{-\int_0^t \delta(s,\omega)ds + < M^c, M^c >_t\right\}$ est un processus à variation finie.

CONCLUSION 1.3

La structure de l'équation différentielle stochastique et la décomposition multiplicative du facteur d'actualisation vers le passé, ont mis en évidence le processus "*trend* hors risque" égal au *trend* diminué du processus caractéristique du bruit.

Ce processus caractéristique, $< M^c, M^c >$, peut donc être interprété comme le prix du risque lié au bruit, lors d'une actualisation.

En particulier, dans un modèle wienérien:

$$\begin{aligned} M^c(t) &= \int_0^t \sigma(s)dw(s) \\ < M^c, M^c >_t &= \int_0^t \sigma^2(s)ds \\ U(t) &= \int_0^t (\delta(s) - \sigma^2(s))ds \end{aligned}$$

b) *Modèles avec sauts*

Dans un modèle déterministe avec sauts, si t_k désigne un instant de capitalisation impulsionnelle, d'amplitude $i_k = I(t_k) - I(t_k^-)$, on a

$$S(t_k) = S(t_k^-) \cdot (1 + i_k) .$$

En inversant,

$$\begin{aligned} \varphi(t_k) &= \varphi(t_k^-) \cdot \frac{1}{1+i_k} \\ &= \varphi(t_k^-) \cdot (1 - \frac{i_k}{1+i_k}). \end{aligned}$$

En introduisant un flux modifié I^*, dont la partie continue et les sauts sont donnés par:

$$\begin{aligned} I^{*c}(t) &= I^c(t) \\ \Delta I_k^* &= \frac{\Delta I_k}{1+\Delta I_k}, \end{aligned}$$

on peut obtenir l'équation différentielle de la fonction φ :

$$d\varphi(t) = -\varphi(t^-)dI^*(t).$$

Il y a donc encore réversibilité de l'équation, moyennant adaptation des sauts. Dans un modèle stochastique général, on introduit également un flux modifié, donné par

$$I^*(t) = \int_0^t \delta(s,\omega)ds + M^c(t,\omega) - A^p(t,\omega) + \sum_{j|T_j \le t} \frac{s_j}{1+s_j} + \sum_{j|S_j \le t} \frac{m_j}{1+m_j}.$$

On a alors:

PROPRIÉTÉ 1.14

Si le flux I est une semi-martingale générale, le processus d'actualisation est solution de l'équation différentielle stochastique

$$d\varphi(t) = -\varphi(t^-)dI^*(t) + \varphi(t^-)d < M^c, M^c >_t . \qquad (4.30)$$

Démonstration

Il suffit à nouveau d'utiliser la formule d'Ito à 1 dimension, avec discontinuités, à la fonction $F(x) = \frac{1}{x}$, de classe $C^2(\mathbf{R}_0^+)$:

$$\varphi(t) = F(S(t)) = F(S(0)) + \int_{(0,t]} -\frac{1}{S^2(s^-)}dS(s) + \frac{1}{2}\int_{(0,t]} \frac{2}{S^3(s^-)}d[S^c, S^c]_s$$

$$+\sum_{0<s\leq t}(\varphi(s)-\varphi(s^-)+\frac{1}{S^2(s^-)}\Delta S(s)),$$

ou

$$\varphi(t)=1+\int_{(0,t]}-\varphi(s^-)dI(s)+\int_{(0,t]}\varphi(s^-)d<M^c,M^c>_s+\sum_{0<s\leq t}(\varphi(s)-\varphi(s^-)$$

$$+\frac{1}{S^2(s^-)}\Delta S(s))\ .$$

Développons le terme de saut du second membre en un temps d'arrêt t_k de discontinuité du flux stochastique noté $i_k=I(t_k)-I(t_k^-)$.
On a:

$$\varphi(t_k)-\varphi(t_k^-)+\frac{1}{S^2(t_k^-)}\cdot\Delta S(t_k)$$

$$=\varphi(t_k)-\varphi(t_k^-)+\frac{1}{S^2(t_k^-)}\cdot S(t_k^-)\cdot i_k$$

$$=\varphi(t_k^-)\cdot(1-\frac{i_k}{1+i_k})-\varphi(t_k^-)\cdot i_k$$

D'autre part, l'intégrale stochastique $\int_{(0,t]}-\varphi(s^-)dI(s)$ saute en $t=t_k$, d'une amplitude $-\varphi(t_k^-)\cdot i_k$.

Le saut en t_k de φ est donc

$$\Delta\varphi(t_k)=-\frac{i_k}{1+i_k}\varphi(t_k^-),$$

et on peut écrire

$$\varphi(t)=\varphi(0)-\int_{(0,t]}\varphi(s^-)dI^*(s)+\int_{(0,t]}\varphi(s^-)d<M^c,M^c>_s\ .$$

REMARQUES

1) La propriété 1.14 s'étend immédiatement à l'équation différentielle stochastique du processus $\varphi_s(t)$, d'actualisation en s $(0\leq s\leq t)$.
2) Les propriétés 1.12 et 1.14 montrent que, par rapport au modèle déterministe, seule la partie martingale locale continue du flux vient modifier la structure de l'équation, en univers aléatoire.

On peut également s'intéresser à la décomposition multiplicative du processus dans le cas général avec sauts.

PROPRIÉTÉ 1.15

Lorsque le flux est une semi-martingale générale, le processus d'actualisation admet la décomposition multiplicative suivante

$$\varphi(t)=\varphi^{(1)}(t)\cdot\varphi^{(2)}(t),$$

où

$$\varphi^{(1)}(t) = \exp\left\{-\int_0^t \delta(s,\omega)ds + < M^c, M^c >_t + A^p(t,\omega) + B^p(t,\omega)\right\} \cdot \prod_{j|T_j \leq t} \frac{1}{1+s_j}$$

est un processus à variation finie (*variation principale*);

$$\varphi^{(2)}(t) = \exp\left\{-M^c(t) - \frac{1}{2} < M^c, M^c >_t - B^p(t,\omega)\right\} \cdot \prod_{j|S_j \leq t} \frac{1}{1+m_j}$$

est une martingale locale (*variation secondaire*).

Le processus B^p étant le compensateur prévisible du processus à variation finie localement intégrable

$$B(t,\omega) = \sum_{j|S_j \leq t} -\frac{m_j}{1+m_j}.$$

Démonstration

La propriété 1.13 incite au regroupement:

$$\varphi(t) = \exp\left\{-\int_0^t \delta(s,\omega)ds + < M^c, M^c >_t\right\}$$

$$\times \prod_{j|T_j \leq t} \frac{1}{1+s_j} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2} < M^c, M^c >_t - M^c(t)\right\} \prod_{j|S_j \leq t} \frac{1}{1+m_j} \cdot \exp A^p(t,\omega) .$$

Intéressons-nous à la structure du terme

$$\varphi^3(t) = \prod_{j|S_j \leq t} \frac{1}{1+m_j} \cdot \exp A^p(t,\omega).$$

Au vu de ce qui précède, il serait naturel que le processus φ^3 soit une martingale locale; il n'en est rien.

En effet, considérons le processus à variation finie construit à partir des sauts du bruit

$$B(t,\omega) = \sum_{j|S_j \leq t} -\frac{m_j}{1+m_j}.$$

Ce processus admet un compensateur prévisible noté B^p.

On considère alors la martingale locale compensée

$$N(t,\omega) = B(t,\omega) - B^p(t,\omega) = \sum_{j|S_j \leq t} \left(-\frac{m_j}{1+m_j}\right) - B^p(t,\omega).$$

L'équation de capitalisation associée au flux N,

$$W(t) = 1 + \int_0^t W(s^-)dN(s),$$

a pour solution

$$W(t) = \prod_{j|S_j \le t} \left(1 - \frac{m_j}{1+m_j}\right) \cdot \exp -B^p(t,\omega)$$
$$= \prod_{j|S_j \le t} \frac{1}{1+m_j} \cdot \exp -B^p(t,\omega).$$

Comme le flux N est une martingale locale, le processus W est une martingale locale.

On peut donc décomposer le processus φ^3:

$$\varphi^3(t) = W(t) \cdot \exp(A^p(t,\omega) + B^p(t,\omega))$$

(produit d'une martingale locale et d'un processus à variation finie). Montrons de plus que $\exp(A^p(t,\omega) + B^p(t,\omega))$ est un processus croissant. A^p étant compensateur de A, $A - A^p$ est une martingale locale; de même $B - B^p$ est un martingale locale.

La somme de 2 martingales locales étant une martingale locale, $A - A^p + B - B^p = (A+B) - (A^p + B^p)$ est une martingale locale. $A^p + B^p = (A+B)^p$ est donc le compensateur du processus à variation finie $(A+B)$. Or

$$(A+B)(t) = \sum_{j|S_j \le t} m_j - \sum_{j|S_j \le t} \frac{m_j}{1+m_j}$$
$$= \sum_{j|S_j \le t} \frac{m_j^2}{1+m_j}.$$

Comme les sauts du bruit $m_j \in (-1,1)$, les sauts $\frac{m_j^2}{1+m_j}$ sont positifs. Le processus $A+B$ est donc un processus croissant; donc également son compensateur, $A^p + B^p$.

On obtient donc finalement la décomposition

$$\varphi(t) = \exp\left\{-\int_0^t \delta(s,\omega)ds + < M^c, M^c >_t\right\}$$

$$\times \prod_{j|T_j \le t} \frac{1}{1+s_j} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2} < M^c, M^c >_t - M^c(t)\right\} W(t) \cdot \exp(A^p(t,\omega) + B^p(t,\omega)).$$

D'autre part, W et $\exp\{-\frac{1}{2} < M^c, M^c > - M^c\}$ étant deux martingales locales orthogonales puisque sans discontinuités communes, leur produit est encore une martingale locale; $\exp(A^p(t,\omega) + B^p(t,\omega))$ étant un processus croissant, le processus $\exp\{-\int_0^t \delta(s,\omega)ds + < M^c, M^c >_t + A^p(t,\omega) + B^p(t,\omega)\}$ est à variation finie, et on obtient la décomposition souhaitée

$$\varphi(t) = \left(\exp\left\{-\int_0^t \delta(s,\omega)ds + < M^c, M^c >_t + A^p(t,\omega) + B^p(t,\omega)\right\}\right.$$

$$\times \prod_{j|T_j \leq t} \frac{1}{1+s_j} \Bigg)$$

$$\times \left(\exp\left\{ -M^c(t) - \frac{1}{2} < M^c, M^c >_t - B^p(t,\omega) \right\} \cdot \prod_{j|S_j \leq t} \frac{1}{1+m_j} \right).$$

CONCLUSION 1.4

La variation principale du facteur d'actualisation met en évidence un *trend* continu hors risque, égal au *trend* continu, diminué d'un processus croissant:

$$U(t,\omega) = \int_0^t \delta(s,\omega)ds - < M^c, M^c >_t - (A^p(t,\omega) + B^p(t,\omega)) \ .$$

La correction, $< M^c, M^c >_t + (A^p(t,\omega) + B^p(t,\omega))$, qui vient ralentir les taux instantanés stochastiques (puisqu'elle est croissante), et donc renchérir le facteur d'actualisation, peut être interprétée comme le prix du risque financier compris dans le bruit; elle tient à la fois compte, de la partie martingale locale continue, au travers du processus caractérisque $< M^c, M^c >$, et de la partie somme compensée de sauts, au travers du compensateur prévisible du processus croissant à sauts $A + B$.

5 Modèles d'équilibre de marché

Une des voies d'investigation les plus fécondes en finance a été la recherche d'équilibre des marchés financiers sur la base du couple indissociable rendement-risque. On s'intéresse cette fois à un ensemble de titres risqués, négociables sur un marché.

On tente, d'une part, de relier le rendement aléatoire de ces différents titres, au rendement global du marché grâce à une théorie explicative adéquate, d'autre part, de proposer une composition optimale de portefeuille en fonction de l'attitude de l'investisseur vis-à-vis du risque (théorie du portefeuille).

En vue d'appréhender le risque, nous nous placerons par définition en univers aléatoire; comme dans la plupart des modèles développés en la matière, la modélisation sera discrète, sur une période de temps.

5.1 Considérations générales

Le marché financier sur lequel seront négociés les titres sera supposé dit *parfait*, c'est-à-dire

- qu'aucun investisseur n'est dominant sur le marché,
- que tous les investisseurs ont accès à toutes les informations concernant les titres,
- que les titres sont infiniment divisibles,

- qu'il n'y a pas de coût de transaction, d'impôts, ni de restriction sur vente à découvert.

Un investisseur investit en début de période une somme supposée unitaire; il répartit pour ce son placement entre différents titres; l'observation du rendement obtenu porte sur une période de temps (modèle statique).

Son comportement sera dit *rationnel* au sens suivant: il cherche à maximiser le rendement obtenu, mais il est supposé éprouver une aversion pour le risque; cette dernière notion sera précisée dans les modèles développés ci-dessous.

L'investissement peut se faire parmi N titres risqués (par exemple, des actions).

Le rendement du titre i ($i = 1, \ldots, N$), au sens de la définition 1.1 (voir (3.14)), est défini par:

$$\text{rendement} = \frac{\text{cours fin de période} - \text{cours début de période} + \text{dividende}}{\text{cours début de période}}$$

La modélisation aléatoire conduit à considérer ces rendements comme des variables aléatoires, définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

NOTATIONS

Nous noterons:

- $\mathbf{R}(\omega) = (R_1(\omega), \ldots, R_N(\omega))$ le vecteur aléatoire des rendements des titres $1, 2, \ldots, N$;
- $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_N) = \mathbf{E}\mathbf{R}(\omega)$ (vecteur moyenne). On suppose que $\boldsymbol{\mu} \neq k \cdot \mathbf{1}$ (tous les rendements moyens ne sont pas égaux);
- $\boldsymbol{\Sigma} = (\sigma_{ij})$ = matrice variance - covariance

$$(\sigma_{ij} = cov(R_i(\omega), R_j(\omega))) \ .$$

Cette matrice $\boldsymbol{\Sigma}$ est supposée définie positive, c'est-à-dire

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \sigma_{ij} Z_i Z_j > 0 \text{ pour tout vecteur} \mathbf{Z} = (Z_1, Z_2, \ldots, Z_N) \in \mathbf{R}^N \text{ non nul.}$$

Financièrement, cette condition revient à supposer:

- que le rendement d'un actif ne peut être obtenu comme combinaison linéaire des rendements des autres actifs;
- qu'aucun actif n'est sans risque.

Un portefeuille est défini par un vecteur

$$\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_N) \in \mathbf{R}^N \text{ tel que:}$$

- X_i = quantité ou proportion investie dans le titre i
- $\sum_{i=1}^{N} X_i = 1$.

Le rendement d'un tel portefeuille sera donné par

$$R(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{N} X_i R_i(\omega) \ .$$

Il s'agit d'une variable aléatoire dont les moments sont donnés par

$$\begin{aligned} \mathsf{E}R(\mathbf{X}) &= \sum_{i=1}^{N} X_i \mu_i \\ \sigma^2(R(\mathbf{X})) &= varR(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \sigma_{ij} X_i X_j . \end{aligned}$$

Remarquons que, sauf mention explicite contraire, certaines composantes du vecteur $\mathbf{X}$ peuvent être négatives (position à découvert).

La théorie du portefeuille s'intéresse à la recherche de portefeuilles optimaux en un sens à préciser.

Outre les N titres risqués, nous aurons également dans certaines applications à supposer l'existence d'un titre non risqué; nous lui affecterons l'indice 0 et noterons son rendement déterministe

$$R_0(\omega) = r = \text{ taux sans risque.}$$

5.2 L'approche moyenne-variance

L'approche moyenne-variance, développée par Markowitz dès 1952, est basée sur une conception du risque financier d'un titre résumé dans sa seule variance.

Il s'agira donc simultanément:

- de maximiser l'espérance mathématique du rendement du portefeuille,
- d'en minimiser la variance.

Nous supposerons d'abord que sont seulement disponibles sur le marché les N titres risqués.

L'approche de Markowitz (1952) se fonde sur la recherche de portefeuilles efficients au sens suivant.

DÉFINITION 1.8

- Un portefeuille $\mathbf{X}^*$ est dit *efficient* s'il n'existe pas de portefeuille $\mathbf{X}$ tel que:

$$\begin{aligned} \mathsf{E}(R(\mathbf{X})) &\geq \mathsf{E}(R(\mathbf{X}^*)) \\ Var(R(\mathbf{X})) &< Var(R(\mathbf{X}^*)) \end{aligned}$$

- Un portefeuille $\mathbf{X}^*$ est dit *frontière* s'il n'existe pas de portefeuille $\mathbf{X}$ tel que:

$$\begin{aligned} \mathsf{E}R(\mathbf{X}) &= \mathsf{E}R(\mathbf{X}^*) \\ VarR(\mathbf{X}) &< VarR(\mathbf{X}^*)\,. \end{aligned}$$

Intuitivement, un portefeuille efficient est tel qu'il n'est pas possible de trouver un portefeuille de variance inférieure (donc de moins grand risque) tout en conservant un rendement au moins égal.

Les portefeuilles efficients forment un sous-ensemble des portefeuilles frontières; ces derniers seront mis en évidence plus facilement, analytiquement.

La recherche de ces portefeuilles frontières revient à résoudre le programme suivant:

Problème 1

$$\min \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} X_i X_j \sigma_{ij} \quad (= \min varR(\mathbf{X}))$$

sous les contraintes:
- $\sum_{i=1}^{N} X_i = 1$
- $\sum_{i=1}^{N} X_i \mu_i = e$ (e fixé).

Pour un niveau fixé de moyenne de rendement, soit e, on minimise la variance du portefeuille. En faisant varier ensuite e, on obtiendra l'ensemble des portefeuilles frontières, dont on isolera enfin les portefeuilles efficients.

Pour résoudre ce programme, on utilise la technique des lagrangiens:

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} X_i X_j \sigma_{ij} + \lambda\left(1 - \sum_{i=1}^{N} X_i\right) + \gamma\left(e - \sum_{i=1}^{N} X_i \mu_i\right)$$

où λ et γ sont 2 multiplicateurs de Lagrange. En dérivant il vient

$$\frac{\partial L}{\partial X_i} = \sum_{j=1}^{N} \sigma_{ij} X_j - \lambda - \gamma \mu_i = 0 \qquad i = 1, \ldots, N.$$

Ce système peut s'écrire sous forme matricielle

$$\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{X} = \lambda \cdot \mathbf{1} + \gamma \cdot \boldsymbol{\mu},$$

dont la solution est

$$\mathbf{X} = \lambda \cdot \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \cdot \mathbf{1} + \gamma \cdot \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \cdot \boldsymbol{\mu}. \tag{5.1}$$

En prémultipliant cette relation par le vecteur $\mathbf{1}' = (11\ldots1)$, il vient

$$\mathbf{1}' \cdot \mathbf{X} = \lambda \cdot \mathbf{1}' \cdot \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \cdot \mathbf{1} + \gamma \mathbf{1}' \cdot \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \cdot \boldsymbol{\mu}.$$

Or $\mathbf{1}' \cdot \mathbf{X} = \sum_{i=1}^{N} X_i = 1$ compte tenu des contraintes; donc

$$1 = \lambda(\mathbf{1}' \cdot \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \cdot \mathbf{1}) + \gamma(\mathbf{1}' \cdot \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \cdot \boldsymbol{\mu}). \tag{5.2}$$

D'autre part, en prémultipliant par le vecteur $\mu' = (\mu_1 \mu_2 \dots \mu_N)$, il vient

$$\mu' \cdot \mathbf{X} = \lambda \mu' \cdot \Sigma^{-1} \cdot 1 + \gamma \mu' \cdot \Sigma^{-1} \cdot \mu.$$

Or $\mu' \cdot \mathbf{X} = \sum_{i=1}^{N} \mu_i X_i = e$ compte tenu des contraintes; donc

$$e = \lambda(\mu' \cdot \Sigma^{-1} \cdot 1) + \gamma(\mu' \cdot \Sigma^{-1} \cdot \mu). \tag{5.3}$$

Les relations (5.3) et (5.2) permettent d'obtenir explicitement λ et γ:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{c - b \cdot e}{d} \\ \gamma &= \frac{a \cdot e - b}{d} \end{aligned}$$

où:

$$\begin{aligned} a &= 1' \cdot \Sigma^{-1} \cdot 1 > 0 \\ b &= 1' \cdot \Sigma^{-1} \cdot \mu \\ c &= \mu' \cdot \Sigma^{-1} \cdot \mu > 0 \\ d &= ac - b^2 > 0 \end{aligned} \tag{5.4}$$

(compte tenu du caractère défini positif de la matrice Σ, donc de son inverse Σ^{-1}).

En replaçant dans (5.1) les valeurs ainsi obtenues de λ et γ, on obtient le portefeuille frontière recherché, pour une valeur de e

$$\mathbf{X} = \frac{c - b \cdot e}{d} \cdot \Sigma^{-1} \cdot 1 + \frac{a \cdot e - b}{d} \Sigma^{-1} \cdot \mu. \tag{5.5}$$

En vue de mieux cerner les portefeuilles efficients, cherchons à présent une relation entre leur variance et leur moyenne:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= var(R(\mathbf{X})) = \mathbf{X}' \cdot \Sigma \cdot \mathbf{X} \\ &= \mathbf{X}' \cdot \Sigma \cdot \left(\frac{c - b \cdot e}{d} \cdot \Sigma^{-1} \cdot 1 + \frac{a \cdot e - b}{d} \cdot \Sigma^{-1} \cdot \mu \right) \\ &= \frac{c - b \cdot e}{d} \mathbf{X}' \cdot 1 + \frac{a \cdot e - b}{d} \cdot \mathbf{X}' \cdot \mu \end{aligned}$$

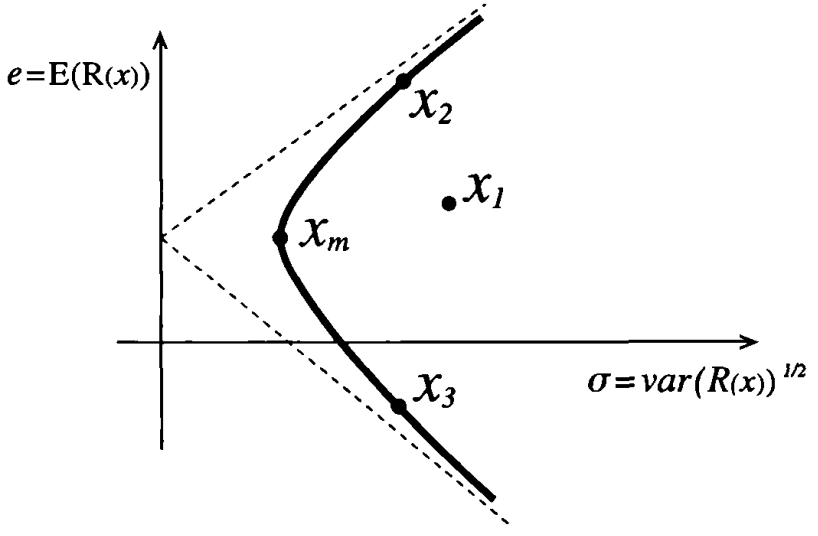
Or

$$\mathbf{X}' \cdot 1 = 1 \text{ et } \mathbf{X}' \cdot \mu = e.$$

Finalement, on a pour un portefeuille frontière

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{c - b \cdot e}{d} + \frac{a \cdot e - b}{d} \cdot e \\ \text{ou } \sigma^2 &= \frac{a \cdot e^2 - 2b \cdot e + c}{d}. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Compte tenu du signe des coefficients a et d, la relation (5.6) définit une hyperbole dans le plan des variables (σ, e).
La branche H du demi-plan $(\sigma \geq 0, e)$ est le lieu des portefeuilles frontières:



L'ensemble des portefeuilles se trouve à la droite de cette branche. La partie supérieure de cette branche, correspondant aux portefeuilles efficients, est appelé frontière efficiente:

x_1 = portefeuille quelconque,
x_2 = portefeuille efficient,
x_3 = portefeuille frontière non efficient,
x_m = portefeuille efficient de variance minimale.

Parmi l'ensemble des portefeuilles frontières, nous pouvons isoler les portefeuilles suivants:

$$\begin{aligned}
\mathbf{X^0} &= \text{portefeuille frontière de rendement moyen } e = 0 \\
&= \frac{1}{d}(c\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \cdot \mathbf{1} - b\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \cdot \boldsymbol{\mu}) \\
\mathbf{X^1} &= \text{portefeuille frontière de rendement moyen } e = 1 \\
&= \frac{1}{d}((c-b)\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \cdot \mathbf{1} - (b-a)\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \cdot \boldsymbol{\mu})) \\
\mathbf{X^m} &= \text{portefeuille frontière de variance minimale.}
\end{aligned}$$

Celui-ci peut être obtenu en annulant la dérivée de σ^2 par rapport à e dans (5.6):

$$\frac{d\sigma^2}{de} = \frac{2a \cdot e - 2b}{d} .$$

Le portefeuille de variance minimale a donc un rendement moyen $e = \frac{b}{a}$, noté m. En substituant dans (5.5), il vient

$$\begin{aligned} \mathbf{X^m} &= \frac{c - b \cdot b/a}{d} \cdot \mathbf{\Sigma^{-1}} \cdot \mathbf{1} \\ &= \frac{ac - b^2}{a \cdot (ac - b^2)} \cdot \mathbf{\Sigma^{-1}} \cdot \mathbf{1} \\ \mathbf{X^m} &= \frac{\mathbf{\Sigma^{-1}} \cdot \mathbf{1}}{\mathbf{1'} \cdot \mathbf{\Sigma^{-1}} \cdot \mathbf{1}} . \end{aligned} \tag{5.7}$$

La variance correspondante est donnée par (voir (5.6))

$$var(R(\mathbf{X^m})) = \frac{1}{a}.$$

D'autre part, la relation (5.5) nous montre que tout portefeuille frontière peut être obtenu comme combinaison linéaire convexe des portefeuilles $\mathbf{X^0}$ et $\mathbf{X^1}$; en effet, en notant $\mathbf{X^e}$, le portefeuille frontière de rendement moyen e, on a

$$\mathbf{X^e} = (1 - e)\mathbf{X^0} + e \cdot \mathbf{X^1}. \tag{5.8}$$

En particulier $\mathbf{X^m} = \mathbf{X^{b/a}}$.

Cette relation nous montre également que l'ensemble des portefeuilles frontières est convexe; il en est de même de l'ensemble des portefeuilles efficients.

Les portefeuilles efficients sont les portefeuilles frontières avec $e \geq m = \frac{b}{a}$. Intéressons-nous enfin aux propriétés de covariance de ces portefeuilles frontières.

Réécrivons pour ce la relation (5.8) sous la forme

$$\begin{aligned} \mathbf{X^e} &= (1 - e)\mathbf{X^0} + e\mathbf{X^1} \\ &= \mathbf{X^0} + e(\mathbf{X^1} - \mathbf{X^0}). \end{aligned}$$

Notons $\mathbf{Z}$ le vecteur

$$\mathbf{Z} = \mathbf{X^1} - \mathbf{X^0} = \frac{1}{d}(a\mathbf{\Sigma^{-1}} \cdot \boldsymbol{\mu} - b \cdot \mathbf{\Sigma^{-1}} \cdot \mathbf{1}).$$

Il s'agit d'un portefeuille d'investissement initial nul.

Calculons $var(R(\mathbf{Z}))$, $var(R(\mathbf{X^0}))$ et $cov(R(\mathbf{X^0}), R(\mathbf{Z}))$, en vue de calculer les covariances de deux portefeuilles frontières:

$$\begin{aligned} var(R(\mathbf{Z})) &= \frac{1}{d^2}\left(a\mathbf{\Sigma^{-1}} \cdot \boldsymbol{\mu} - b\mathbf{\Sigma^{-1}} \cdot \mathbf{1}\right)' \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \left(a \cdot \mathbf{\Sigma^{-1}} \cdot \boldsymbol{\mu} - b\mathbf{\Sigma^{-1}} \cdot \mathbf{1}\right) \\ &= \frac{1}{d^2}(a^2\boldsymbol{\mu}'\mathbf{\Sigma^{-1}}\mathbf{\Sigma}\mathbf{\Sigma^{-1}}\boldsymbol{\mu} - ab\boldsymbol{\mu}'\mathbf{\Sigma^{-1}}\mathbf{\Sigma}\mathbf{\Sigma^{-1}} \cdot \mathbf{1} \\ &\quad -ab\mathbf{1}' \cdot \mathbf{\Sigma^{-1}}\mathbf{\Sigma}\mathbf{\Sigma^{-1}} \cdot \boldsymbol{\mu} + b^2\mathbf{1}'\mathbf{\Sigma^{-1}}\mathbf{\Sigma}\mathbf{\Sigma^{-1}} \cdot \mathbf{1}) \\ &= \frac{1}{d^2}(a^2c + b^2a - 2ab^2) = \frac{1}{d^2}(a^2c - ab^2) = \frac{a}{d^2}(ac - b^2) = \frac{a}{d} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} cov(R(\mathbf{X^0}), R(\mathbf{Z})) &= \frac{1}{d^2}(c\Sigma^{-1}\cdot\mathbf{1} - b\Sigma^{-1}\cdot\mu)'\cdot\Sigma\cdot(a\Sigma^{-1}\cdot\mu - b\Sigma^{-1}\cdot\mathbf{1}) \\ &= \frac{1}{d^2}(ca\mathbf{1}'\Sigma^{-1}\Sigma\Sigma^{-1}\mu - cb\mathbf{1}'\Sigma^{-1}\Sigma\Sigma^{-1}\cdot\mathbf{1} \\ &\quad -ab\mu'\Sigma^{-1}\Sigma\Sigma^{-1}\mu + b^2\mu'\Sigma^{-1}\Sigma\Sigma^{-1}\cdot\mathbf{1}) \\ &= \frac{1}{d^2}(cab - cba - abc + b^3) \\ &= -\frac{b}{d} \end{aligned}$$

$var(R(\mathbf{X^0})) = \frac{c}{d}$ compte tenu de (5.6).

Considérons alors 2 portefeuilles frontières $\mathbf{X^{e_1}}$ et $\mathbf{X^{e_2}}$; on peut calculer leur covariance

$$\begin{aligned} & cov(R(\mathbf{X^{e_1}}, R(\mathbf{X^{e_2}})) = (\mathbf{X^0} + e_1\cdot\mathbf{Z})'\cdot\Sigma\cdot(\mathbf{X^0} + e_2\mathbf{Z}) \\ = \ & \mathbf{X'^0}\Sigma\mathbf{X^0} + e_2\cdot\mathbf{X'^0}\Sigma\mathbf{Z} + e_1\mathbf{Z}'\Sigma\mathbf{X^0} + e_1e_2\mathbf{Z}'\Sigma\mathbf{Z} \\ = \ & varR(\mathbf{X^0}) + (e_1+e_2)cov(R(\mathbf{X^0}), R(\mathbf{Z})) + e_1e_2varR(\mathbf{Z}) \end{aligned}$$

$$cov(R(\mathbf{X^{e_1}}, R(\mathbf{X^{e_2}})) = \frac{c}{d} - (e_1+e_2)\cdot\frac{b}{d} + e_1e_2\cdot\frac{a}{d}\,. \tag{5.9}$$

De la relation (5.9), nous tirons les propriétés suivantes:

a) $$\begin{aligned} cov(R(\mathbf{X^{e_1}}), R(\mathbf{X^m})) &= \frac{c}{d} - (e_1 + \frac{b}{a})\frac{b}{d} + e_1\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{d} \\ &= \frac{c}{d} - \frac{b^2}{ad} = \frac{1}{a} = var(R(\mathbf{X^m}))\ ; \end{aligned}$$

b) à tout portefeuille frontière $\mathbf{X^e}$, on peut associer un portefeuille frontière conjugué $\mathbf{X^{\theta(e)}}$ qui ne lui est pas corrélé, pour $e \neq m$; $\theta(e)$ est solution de

$$\frac{c}{d} - (e+\theta(e))\frac{b}{d} + e\theta(e)\frac{a}{d} = 0$$

$$\theta(e) = \frac{b\cdot e - c}{a\cdot e - b}\,. \tag{5.10}$$

Calculons également la covariance d'un portefeuille frontière $\mathbf{X^e}$ avec un portefeuille quelconque $\mathbf{X}$:

$$\begin{aligned} cov(R(\mathbf{X^e}), R(\mathbf{X})) &= \left(\frac{c - b\cdot e}{d}\Sigma^{-1}\cdot\mathbf{1} + \frac{a\cdot e - b}{d}\Sigma^{-1}\cdot\mu\right)'\cdot\Sigma\cdot\mathbf{X} \\ &= \frac{c-be}{d}\mathbf{1}'\cdot\Sigma^{-1}\cdot\Sigma\mathbf{X} + \frac{ae-b}{d}\mu'\Sigma^{-1}\Sigma\mathbf{X} \\ &= \frac{c-be}{d} + \frac{a\cdot e - b}{d}\cdot\mathbf{E}R(\mathbf{X}), \end{aligned} \tag{5.11}$$

puisque

$$\mathbf{1}' \cdot \mathbf{X} = \sum_{i=1}^{N} X_i = 1$$

et

$$\boldsymbol{\mu}' \cdot \mathbf{X} = \sum_{i=1}^{N} X_i \mu_i = \mathsf{E}R(\mathbf{X}) \, .$$

L'expression (5.11) peut être réécrite sous la forme

$$\mathsf{E}R(\mathbf{X}) = \frac{b \cdot e - c}{a \cdot e - b} + \frac{d}{a \cdot e - b} cov(R(\mathbf{X}), R(\mathbf{X}^e)),$$

ou encore compte tenu de (5.10) et (5.6),

$$\begin{aligned} \mathsf{E}R(\mathbf{X}) &= \theta(e) + \frac{cov(R(\mathbf{X}), R(\mathbf{X}^e))}{var R(\mathbf{X}^e)} \cdot \left(\frac{ae^2 - 2be + c}{d} \cdot \frac{d}{ae - b} \right) \\ &= \theta(e) + \beta(\mathbf{X}, \mathbf{X}^e) \cdot \frac{ae^2 - be - (be - c)}{ae - b} \\ &= \theta(e) + \beta(\mathbf{X}, \mathbf{X}^e) \cdot (e - \theta(e)) \\ &= (1 - \beta(\mathbf{X}, \mathbf{X}^e))\theta(e) + \beta(\mathbf{X}, \mathbf{X}^e) \cdot e, \end{aligned} \tag{5.12}$$

où

$$\beta(\mathbf{X}, \mathbf{X}^e) = \frac{cov(R(\mathbf{X}), R(\mathbf{X}^e))}{var R(\mathbf{X}^e)}$$

sera appelé risque systématique du portefeuille $\mathbf{X}$ relativement au portefeuille frontière $\mathbf{X}^e$.

CONCLUSION

Cette approche moyenne-variance nous a ainsi permis de mettre en évidence une famille de portefeuilles dits efficients de variance minimale pour un niveau de rendement moyen fixé.

L'investisseur rationnel au sens moyenne variance choisira donc parmi cette famille de portefeuilles efficients; le choix d'un portefeuille bien défini sera alors lié au degré d'aversion au risque qu'éprouve l'investisseur. Il peut être formalisé par le programme suivant.

Problème 2

$$\begin{aligned} &\max(\mathsf{E}R(\mathbf{X}) - \rho \cdot \frac{1}{2} var R(\mathbf{X})) \\ &= \max \left(\sum_{i=1}^{N} X_i \mu_i - \rho \cdot \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} X_i X_j \sigma_{ij} \right), \end{aligned}$$

sous la contrainte

$$\sum_{i=1}^{N} X_i = 1$$

où $\rho > 0$ est un paramètre de mesure d'aversion au risque de l'investisseur; la fonction objectif traduit donc une pénalisation du rendement moyen par une fraction de la variance.

Remarquons d'abord que la solution du problème 2 est nécessairement un portefeuille efficient, compte tenu de la définition 1.

Le problème 2 revient donc à particulariser *un* portefeuille efficient, fonction du degré d'aversion au risque de l'investisseur, modélisé dans le cadre moyenne-variance, par le paramètre $\rho > 0$.

Nous pouvons résoudre directement ce problème 2, en utilisant à nouveau une fonction lagrangienne:

$$L = \sum_{i=1}^{N} X_i \mu_i - \frac{\rho}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} X_i X_j \sigma_{ij} + \bar{\lambda} \cdot (1 - \sum_{i=1}^{N} X_i)$$

où $\bar{\lambda}$ est un multiplicateur de Lagrange.

En dérivant, il vient

$$\frac{\partial L}{\partial X_i} = \mu_i - \rho \sum_{j=1}^{N} \sigma_{ij} X_j - \bar{\lambda} = 0.$$

Ce système peut s'écrire sous forme matricielle:

$$\rho \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{X} = \bar{\lambda} \cdot \mathbf{1} + \boldsymbol{\mu}$$

ou

$$\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{X} = \frac{\bar{\lambda}}{\rho} \cdot \mathbf{1} + \frac{1}{\rho} \cdot \boldsymbol{\mu}$$

dont la solution est

$$\mathbf{X} = \frac{\bar{\lambda}}{\rho} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \cdot \mathbf{1} + \frac{1}{\rho} \cdot \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \cdot \boldsymbol{\mu}$$

qui n'est pas sans rappeler la relation (5.1).

En prémultipliant cette relation par le vecteur $\mathbf{1} = (11 \ldots 1)$, il vient

$$1 = \mathbf{1}' \cdot \mathbf{X} = \frac{\bar{\lambda}}{\rho} \mathbf{1}' \cdot \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \cdot \mathbf{1} + \frac{1}{\rho} \mathbf{1}' \cdot \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \cdot \boldsymbol{\mu}.$$

On en tire explicitement $\bar{\lambda}$, compte tenu de (5.4):

$$\bar{\lambda} = \frac{\rho - b}{a}.$$

En substituant, il vient

$$\mathbf{X} = \frac{\rho - b}{a\rho} \cdot \Sigma^{-1} \cdot \mathbf{1} + \frac{1}{\rho} \cdot \Sigma^{-1} \cdot \mu. \tag{5.13}$$

On peut alors établir un lien entre le coefficient d'aversion au risque ρ, et le rendement moyen du portefeuille, en identifiant les relations (5.13) et (5.5). En particulier,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{a \cdot e - b}{d}$$

i.e.

$$\rho = \frac{d}{a \cdot e - b} \tag{5.14}$$

qui donne le lien entre le degré d'aversion au risque et le rendement moyen attendu.

Remarquons que la condition $\rho > 0$, qui traduit précisément l'aversion pour le risque, conduit au niveau du rendement moyen à la condition

$$e > \frac{b}{a} = m,$$

c'est-à-dire la condition caractérisant, parmi les portefeuilles frontières, les portefeuilles efficients.

REMARQUES

1) *Concept de diversification*

L'approche moyenne-variance développée ci-dessus conduit naturellement au concept de diversification. La diversification peut être définie comme l'atténuation du risque financier pour la combinaison au sein d'un portefeuille, de plusieurs actifs. L'utilisation du seul critère de l'espérance mathématique conduit naturellement à concentrer l'investissement sur l'actif de rendement moyen maximum.

L'introduction du risque, et sa paramétrisation par l'intermédiaire du paramètre ρ, conduit au contraire à diversifier le portefeuille.

Afin d'illustrer cette liaison entre diversification et risque, considérons à titre d'exemple le cas de N titres supposés indépendants et de moyenne et variance égale:

$$\mu_i = \mu \qquad i = 1, \ldots, N$$
$$\sigma_{ij} = \sigma^2 \cdot \delta_{ij} \qquad i, j = 1, \ldots, N.$$

On construit les deux portefeuilles suivants.

Stratégie 1: concentration sur le titre n°1

$$X_1 = 1 \qquad X_2, X_3, \ldots, X_N = 0$$

On a dans ce cas:

$$\begin{aligned} \mathsf{E}R(\mathbf{X}) &= \mu \\ varR(\mathbf{X}) &= varR_1(\omega) = \sigma^2 \end{aligned}$$

Stratégie 2: partage égal entre les N titres

$$X_i = \frac{1}{N} \qquad i = 1, \ldots, N$$

On a dans ce cas:

$$\begin{aligned} \mathsf{E}R(\mathbf{X}) &= \mathsf{E}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{N} R_i(\omega)\right) = \frac{1}{N} \cdot N \cdot \mu = \mu \\ varR(\mathbf{X}) &= var\left(\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N} R_i(\omega)\right) = \frac{1}{N^2} \cdot N\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{N}. \end{aligned}$$

Du seul point de vue de l'espérance mathématique du rendement, les stratégies 1 et 2 sont équivalentes. La prise en compte du risque conduit en revanche à retenir sans conteste la stratégie 2 compte tenu de sa plus faible variance.

Montrons de plus, que la stratégie 2 est solution du problème 2 (portefeuille optimal au sens moyenne-variance). En effet, dans ce cas, la fonction lagrangienne devient

$$L = \sum_{i=1}^{N} X_i \mu - \frac{\rho}{2} \cdot \sum_{i=1}^{N} X_i^2 \sigma^2 + \bar{\lambda}\left(1 - \sum_{i=1}^{N} X_i\right).$$

En dérivant, il vient

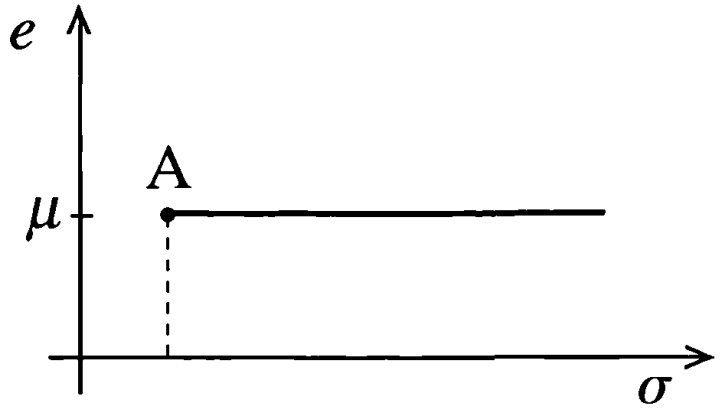
$$\frac{\partial L}{\partial X_i} = \mu - \rho\sigma^2 \cdot X_i - \bar{\lambda} = 0,$$

ce qui conduit à une valeur commune des X_i

$$X_i = (\mu - \bar{\lambda})/\rho\sigma^2 = \frac{1}{N}.$$

Remarquons qu'il s'agit ici d'un cas limite par rapport aux hypothèses utilisées précédemment où nous avions en particulier supposé que tous les rendements moyens n'étaient pas égaux. L'hypothèse des rendements égaux rend le problème dégénéré; en particulier le coefficient d (voir (5.4)) est dans ce cas nul, et la relation (5.5) ne peut être envisagée. L'ensemble des portefeuilles frontières est réduit à un point: la stratégie 2. L'ensemble des portefeuilles est réduit à une droite dans le plan (σ, e), puisque tous les portefeuilles ont le même rendement

moyen μ. Le point A représente le seul portefeuille efficient correspondant à la stratégie 2.



2) *Ventes à découvert*

Dans les problèmes 1 et 2, nous n'avons pas exigé que les parts investies X_i soient positives.

Les solutions obtenues peuvent donc conduire à des coefficients $X_i < 0$ pour certains titres. Il s'agit alors d'une position dite de vente à découvert (réception du prix que vaut le titre en début de période contre obligation de payer en fin de période le prix que le titre vaudra à ce moment).

Si l'on désire se restreindre à des portefeuilles sans position de vente à découvert, il faut modifier en conséquence les contraintes.

Le problème 2 devient alors par exemple:

Problème 2 bis

$$\max \left(\sum_{i=1}^{N} X_i \mu_i - \frac{\rho}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} X_i X_j \sigma_{ij} \right)$$

sous les contraintes:

- $\sum_{i=1}^{N} X_i = 1$
- $X_j \geq 0 \quad j = 1, \ldots, N.$

5.3 Le modèle de Sharpe (1963)

Le modèle de Markowitz, développé au paragraphe 5.2, s'il ne pose guère de problème conceptuel de résolution, peut se révéler difficile à utiliser en pratique, en présence d'un grand nombre de titres. En effet, il est nécessaire:

- d'une part, dans la procédure de paramétrisation de fixer les N valeurs des rendements moyens, mais surtout les $\frac{N^2+N}{2}$ constituants de la matrice variance-covariance (ceci conduit, pour 1000 titres, à devoir fixer 501.500 paramètres!);
- d'autre part, dans la procédure de calcul, d'inverser la matrice variance-covariance.

Une approche simplificatrice, mais également au contenu explicatif important, a été introduite par Sharpe (1963). Plutôt que de considérer une forme quelconque de matrice variance-covariance des rendements, Sharpe propose une structure où les rendements des différents titres sont exclusivement liés entre eux par leur commune relation avec un indice de base sous-jacent.

Plus exactement, on introduit le modèle unifactoriel suivant pour les rendements $\mathbf{R}(\omega) = (R_1(\omega), \ldots, R_N(\omega))$ des titres $i = 1, 2, \ldots, N$:

$$R_i(\omega) = \alpha_i + \beta_i \cdot I(\omega) + \epsilon_i(\omega), \tag{5.15}$$

où:

(a) α_i, β_i sont des constantes

(b) $I(\omega) = \alpha_{N+1} + \epsilon_{N+1}(\omega)$ avec

(c) $\alpha_{N+1} \in \mathbf{R}$

(d) ϵ_{N+1} est une variable aléatoire telle que

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\epsilon_{N+1} &= 0 \\ var\epsilon_{N+1} &= \sigma^2_{N+1} \end{aligned}$$

(e) $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_N\}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, et indépendantes de ϵ_{N+1}, telles que

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\epsilon_i &= 0 \\ var\epsilon_i &= \sigma^2. \end{aligned}$$

Le rendement d'un portefeuille donné $\mathbf{X}$ est alors

$$\begin{aligned} R(\mathbf{X}) &= \sum_{i=1}^{N} X_i R_i = \sum_{i=1}^{N} X_i[\alpha_i + \beta_i I + \epsilon_i] \\ &= \sum_{i=1}^{N} X_i(\alpha_i + \epsilon_i) + \left(\sum_{i=1}^{N} X_i \beta_i\right) \cdot I \end{aligned}$$

En posant $X_{N+1} = \sum_{i=1}^{N} X_i \beta_i$, il vient

$$\begin{aligned} R(\mathbf{X}) &= \sum_{i=1}^{N} X_i(\alpha_i + \epsilon_i) + X_{N+1} \cdot [\alpha_{N+1} + \epsilon_{N+1}] \\ &= \sum_{i=1}^{N+1} X_i \cdot (\alpha_i + \epsilon_i). \end{aligned} \tag{5.16}$$

L'indice I est donc introduit comme une $(N+1)$ ième valeur.

Les variables $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_{N+1}$ étant supposées indépendantes, l'écriture (5.16) permet de diagonaliser la matrice variance-covariance:

$$\begin{aligned} var\ R(\mathbf{X}) &= var\left(\sum_{i=1}^{N+1} X_i(\alpha_i + \epsilon_i)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{N+1} X_i^2 \sigma_i^2 \,. \end{aligned}$$

D'autre part, le nombre de paramètres dans ce modèle, n'est que de $2N+3$ (en lieu de place de $\frac{N^2+N}{2}$ dans le modèle général de Markowitz).

5.4 Modèle avec titre non risqué

Supposons à présent que l'investissement puisse se faire non seulement parmi les N titres risqués (par exemple des actions) mais également dans un titre non risqué (songeons à une obligation d'Etat) dont le rendement est fixé.

Nous allons obtenir dans ce contexte un résultat dit de *séparation en deux fonds.*

Le titre non risqué est caractérisé par

$$\begin{aligned} \mathsf{E}R_0(\omega) &= r \\ var\ R_0(\omega) &= 0 \,. \end{aligned}$$

Un portefeuille sera un vecteur $\mathbf{m} = (m_0, m_1, m_2, \ldots, m_N) \in \mathbf{R}^{N+1}$

- m_0 est la proportion investie dans l'actif sans risque;
- m_i $(i = 1, \ldots, N)$ est la proportion investie dans l'actif risqué i avec la contrainte

$$\sum_{i=0}^{N} m_i = 1.$$

Le rendement d'un tel portefeuille peut se noter

$$\begin{aligned} R(\mathrm{m}) &= \sum_{i=1}^{N} m_i R_i(\omega) + m_0 \cdot r \\ &= (1-\alpha)r + \alpha \cdot R(\mathbf{X}), \end{aligned} \tag{5.17}$$

où

(a) $\alpha = \sum_{i=1}^{N} m_i = 1 - m_0$

(b) $R(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{N} m_i R_i(\omega) / \sum_{i=1}^{N} m_i = \sum_{i=1}^{N} X_i \cdot R_i(\omega)$, avec

$$X_i = \frac{m_i}{\sum_{j=1}^{N} m_j} \qquad (i = 1, \ldots, N).$$

Remarquons que le vecteur $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_N)$ forme bien un portefeuille sans titre non risqué, au sens du paragraphe 5.2.

En particulier,

$$\sum_{i=1}^{N} X_i = 1.$$

Le paramètre α représente la proportion investie dans le portefeuille de valeurs risquées.

Calculons à présent la moyenne et la variance de l'expression (5.17):

$$\begin{aligned} \mathsf{E}R(\mathrm{m}) &= (1-\alpha)r + \alpha \cdot \mathsf{E}R(\mathbf{X}) \\ \sigma^2(R(\mathrm{m})) &= \alpha \cdot \sigma^2(R(\mathbf{X})). \end{aligned}$$

En combinant ces deux relations il vient

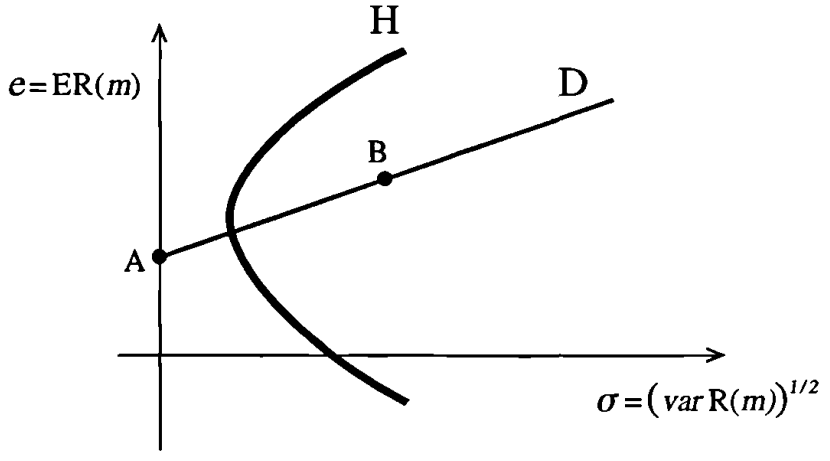
$$\begin{aligned} \mathsf{E}R(\mathrm{m}) &= \left(1 - \frac{\sigma(R(\mathrm{m}))}{\sigma \cdot R(\mathbf{X})}\right) \cdot r + \frac{\sigma(R(\mathrm{m}))}{\sigma(R(\mathbf{X}))} \cdot \mathsf{E}R(\mathbf{X}) \\ &= r + \frac{\sigma(R(\mathrm{m}))}{\sigma(R(\mathbf{X}))} \cdot (\mathsf{E}R(\mathbf{X}) - r) \end{aligned} \tag{5.18}$$

Cette formule illustre le principe de séparation en deux fonds: la relation (5.18), pour un portefeuille fixé $\mathbf{X}$, définit une droite D dans l'espace

$$(\sigma, e) = (\sigma(R(\mathrm{m}), \mathsf{E}(R(\mathrm{m}))),$$

passant par les points

$$\begin{aligned} A &= (0, r) \text{ (titre sans risque)} \\ B &= (\sigma(R(\mathbf{X})), \mathsf{E}R(\mathbf{X})) \text{ (portefeuille sans titre sans risque).} \end{aligned}$$



Le problème de recherché de portefeuilles frontières peut alors se formuler de la façon suivante, en notant $\bar{\mathbf{m}} = (m_1, m_2, \ldots, m_N)$ la restriction du vecteur $\mathbf{m}$ aux N dernières composantes (la première composante m_0, qui représente la quantité investie au taux sans risque, sera obtenue, une fois fixé le vecteur $\bar{\mathbf{m}}$, de façon à ce que la contrainte de budget $\sum_{i=0}^{N} m_i = 1$ soit satisfaite).

Problème 3

$$\min \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} m_i m_j \sigma_{ij} = \min \frac{1}{2} \bar{\mathbf{m}}' \Sigma \bar{\mathbf{m}}$$

sous la contrainte

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \mu_i + \left(1 + \sum_{i=1}^{N} m_i\right) \cdot r = e,$$

ou

$$\sum_{i=1}^{N} m_i (\mu_i - r) = e - r. \tag{5.19}$$

La résolution de ce problème peut à nouveau se faire par l'introduction d'un lagrangien:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} m_i m_j \sigma_{ij} + \lambda \left(e - r - \sum_{i=1}^{N} m_i (\mu_i - r)\right).$$

En dérivant, il vient

$$\frac{\partial L}{\partial m_i} = \sum_{j=1}^{N} \sigma_{ij} m_j - \lambda(\mu_i - r) = 0 \qquad i = 1, \ldots, N,$$

ou, sous forme matricielle

$$\Sigma \cdot \bar{\mathrm{m}} = \lambda(\mu - r \cdot 1),$$

dont la solution est

$$\bar{\mathrm{m}} = \lambda \cdot \Sigma^{-1} \cdot (\mu - r \cdot 1). \tag{5.20}$$

En prémultipliant cette relation à gauche par le vecteur $(\mu - r \cdot 1)$, et compte tenu de la contrainte (5.19), il vient

$$(\mu - r \cdot 1)' \cdot \bar{\mathrm{m}} = e - r = \lambda \cdot (\mu - r1)' \cdot \Sigma^{-1} \cdot (\mu - r1)$$

ce qui permet d'isoler λ, et d'écrire en tenant compte de (5.4),

$$\lambda = \frac{e - r}{(\mu - r1)'\Sigma^{-1} \cdot (\mu - r1)} = \frac{e - r}{c - 2rb + r^2 a}.$$

L'ensemble des portefeuilles frontières est donc

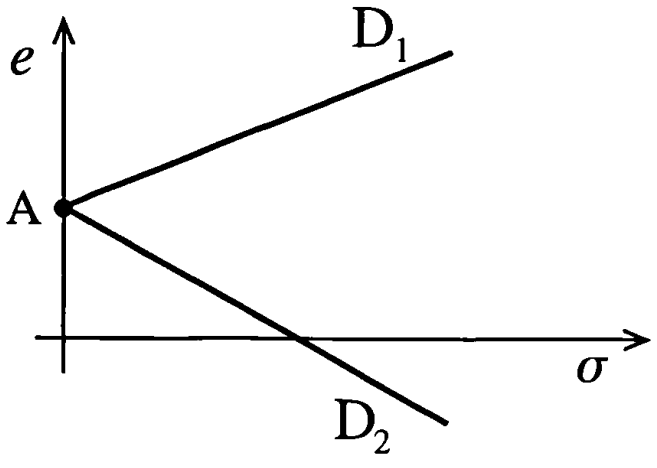
$$\bar{\mathrm{m}} = \frac{e - r}{c - 2rb + r^2 a} \cdot \Sigma^{-1} \cdot (\mu - r \cdot 1)\,. \tag{5.21}$$

Cherchons à nouveau, comme dans le problème sans titre non risqué, une relation entre moyenne et variance des portefeuilles frontières:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= var(R(\mathrm{m})) = \bar{\mathrm{m}}' \cdot \Sigma \cdot \bar{\mathrm{m}} \\ &= \bar{\mathrm{m}}' \cdot \Sigma \cdot (\lambda \cdot \Sigma^{-1} \cdot (\mu - r \cdot 1)) \\ &= \lambda \cdot \bar{\mathrm{m}}' \cdot (\mu - r \cdot 1) = \lambda \cdot (e - r) \\ \sigma^2 &= \frac{(e - r)^2}{(c - 2rb + r^2 a)}. \end{aligned} \tag{5.22}$$

Cette relation (à comparer à la relation (5.6) dans le cas sans titre non risqué), définit dans le demi-plan $(\sigma \geq 0, e)$, deux demi-droites d'origine $A(0, r)$, et de pentes $\pm(c - 2rb + r^2 a)^{1/2}$.

La demi-droite de pente positive D_1 est le lieu des portefeuilles efficients.



Parmi l'ensemble des portefeuilles efficients, nous pouvons isoler les portefeuilles suivants:

(i) portefeuille sans risque: $m_0 = 1$, $m_i = 0$ $(i = 1, \ldots, N)$ (investissement dans l'actif sans risque) (point A dans l'espace (σ, e));

(ii) portefeuille constitué uniquement d'actifs risqués:

$$m_0 = 0$$

(point C dans l'espace (σ, e)).

Pour obtenir ce portefeuille, il suffit de noter que dans ce cas, $\sum_{i=1}^{N} m_i = 1$, et donc en prémultipliant (5.20) par le vecteur 1, il vient

$$\begin{aligned} 1 &= \lambda \cdot \mathbf{1}'\Sigma^{-1} \cdot (\mu - r\mathbf{1}) \\ \text{ou } 1 &= \lambda(\mathbf{1}'\Sigma^{-1} \cdot \mu - r\mathbf{1}'\Sigma^{-1} \cdot \mathbf{1}) \\ 1 &= \lambda(b - r \cdot a) \end{aligned}$$

donc

$$\lambda = \frac{1}{b - ra}.$$

En substituant, dans (5.21), il vient

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{m}} &= \frac{1}{b - ra} \cdot \Sigma^{-1} \cdot (\mu - r\mathbf{1}) \\ \bar{\mathbf{m}} &= \frac{1}{b - ra}\Sigma^{-1} \cdot \mu - \frac{r}{b - ra} \cdot \Sigma^{-1} \cdot \mathbf{1}. \end{aligned} \tag{5.23}$$

Ce portefeuille, qui est également un portefeuille dans le cadre du modèle sans titre non risqué, est de plus, dans ce cadre, également un portefeuille efficient; il suffit pour ce de comparer (5.23) et (5.5), en calculant le rendement moyen e de ce portefeuille:

$$\begin{aligned} e &= \mu' \cdot \bar{\mathbf{m}} = \frac{1}{b-ra} \cdot \mu' \Sigma^{-1} \mu - \frac{r}{b-ra} \mu' \Sigma^{-1} \cdot \mathbf{1} \\ &= \frac{1}{b-ra} \cdot b = \frac{c-r \cdot b}{b-r \cdot a}. \end{aligned} \tag{5.24}$$

En substituant cette valeur de e dans (5.5), on a

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \frac{c - b \cdot \frac{c-rb}{b-ra}}{d} \cdot \Sigma^{-1} \cdot \mathbf{1} + \frac{a \cdot \frac{c-rb}{b-ra} - b}{d} \Sigma^{-1} \cdot \mu \\ &= \frac{cb - cra - bc + rb^2}{d(b-ra)} \Sigma^{-1} \cdot \mathbf{1} + \frac{ac - arb - b^2 + rab}{d(b-ra)} \Sigma^{-1} \cdot \mu \\ &= \frac{r(b^2 - ac)}{d(b-ra)} \Sigma^{-1} \cdot \mathbf{1} + \frac{ac - b^2}{d(b-ra)} \Sigma^{-1} \cdot \mu \\ &= -\frac{r}{b-ra} \Sigma^{-1} \cdot \mathbf{1} + \frac{1}{b-ra} \Sigma^{-1} \cdot \mu \\ &= \bar{\mathbf{m}} \quad \text{défini par (5.23).} \end{aligned}$$

Montrons de plus que la droite D_1 des portefeuilles efficients avec titre sans risque est tangente à la branche d'hyperbole H des portefeuilles efficients sans titre sans risque au point C correspondant à ce portefeuille.

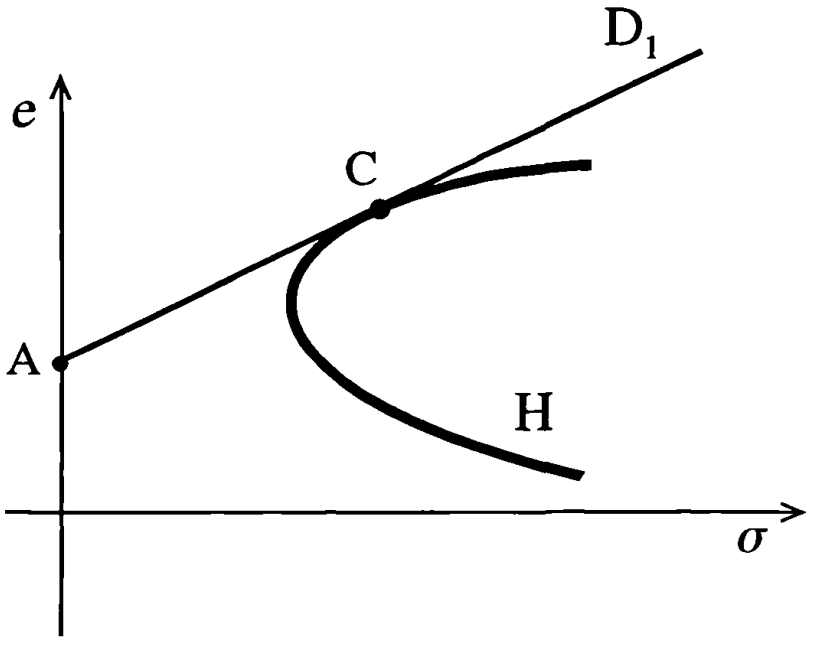
Dérivons pour ce l'expression (5.6):

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{de} &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{ae^2 - 2be + c}{d} \right)^{-1/2} \cdot \left(\frac{2ae - 2b}{d} \right) \\ &= \frac{a \cdot e - b}{(d \cdot (ae^2 - 2be + c))^{1/2}}. \end{aligned}$$

Au point correspondant au portefeuille (5.23), et compte tenu de la valeur de e en ce point donné par (5.24), il vient

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{de} &= \frac{a \cdot \frac{c-rb}{b-ra} - b}{(d \cdot (a \cdot (\frac{c-rb}{b-ra})^2 - 2b \cdot \frac{c-rb}{b-ra} + c))^{1/2}} \\ &= \frac{ac - arb - b^2 + arb}{(d(a(c-rb)^2 - 2b(c-rb)(b-ra) + c(b-ra)^2))^{1/2}} \\ &= \frac{d}{(d(ac - b^2)(c - 2rb + r^2 a))^{1/2}} \\ &= (c - 2rb + r^2 a)^{-1/2}, \end{aligned}$$

qui est bien l'inverse de la pente de la droite D_1.



H: lieu des portefeuilles frontières sans titre non risqué;
D_1: lieu des portefeuilles efficients avec titre non risqué.

Obtenons enfin les propriétés de covariance, et l'équivalent de la relation (5.12). Pour ce, considérons d'une part un portefeuille quelconque $\mathbf{m}$, d'autre part un portefeuille frontière $\mathbf{m}^e$, de rendement moyen e:

$$\begin{aligned} cov(R(\mathbf{m}^e), R(\mathbf{m})) &= \bar{\mathbf{m}}'\Sigma\bar{\mathbf{m}}^e \\ &= \bar{\mathbf{m}}'\Sigma(\lambda \cdot \Sigma^{-1} \cdot (\mu - r \cdot \mathbf{1})) \\ &= \lambda \cdot \bar{\mathbf{m}}' \cdot (\mu - r \cdot \mathbf{1}) = \frac{var R(\mathbf{m}^e)}{(\mathsf{E}R(\mathbf{m}^e) - r)} \cdot \bar{\mathbf{m}}'(\mu - r\mathbf{1}) \,. \end{aligned}$$

En notant

$$\beta(\mathbf{m}, \mathbf{m}^e) = \frac{cov(R(\mathbf{m}^e), R(\mathbf{m}))}{var R(\mathbf{m}^e)} \tag{5.25}$$

on a

$$\beta(\mathbf{m}, \mathbf{m}^e) \cdot (\mathsf{E}R(\mathbf{m}^e) - r) = \bar{\mathbf{m}}'(\mu - r\mathbf{1}) = \mathsf{E}R(\mathbf{m}) - r$$

soit

$$\mathsf{E}R(\mathbf{m}) = r + \beta(\mathbf{m}, \mathbf{m}^e) \cdot (\mathsf{E}R(\mathbf{m}^e) - r). \tag{5.26}$$

Cette dernière relation lie le taux de rendement moyen d'un portefeuille quelconque:

- au taux sans risque,
- à la prime de risque ($\mathrm{E}R(\mathrm{m}^e) - r$) d'un portefeuille frontière donné,
- à la corrélation existant entre le portefeuille et le portefeuille frontière.

5.5 Capital Asset Pricing Model

Sur la base des résultats et analyses de la théorie du portefeuille développée dans les paragraphes précédents, l'objectif est à présent de développer une théorie d'équilibre des marchés financiers. Nous nous intéresserons ici, non plus au choix de portefeuille d'un investisseur individuel, mais au comportement d'ensemble d'un marché, lorsque tous les investisseurs opèrent conformément à la théorie du portefeuille. Ceci signifie en particulier que:

- le marché est supposé parfait,
- les investisseurs sont averses au risque et agissent rationnellement.

Nous supposerons de plus que tous les investisseurs présents sur le marché, sont d'accord sur les paramètres de distribution des actifs. Nous nous placerons dans le cas de l'existence d'un actif non risqué, sauf mention contraire.

Le marché est supposé constitué de N titres risqués, et de J investisseurs. La richesse initiale du j-ième investisseur est notée

$$W_{0j} > 0 .$$

La valeur totale initiale du marché est donc

$$W_0 = \sum_{j=1}^{J} W_{0j} .$$

Chaque investisseur choisit un portefeuille efficient au sens du paragraphe 5.4, noté

$$\mathrm{m}_j = (m_{0j}, m_{1j}, \ldots, m_{Nj})$$

m_{0j} = proportion investie par l'investisseur j dans le titre sans risque,

m_{ij} = proportion investie par l'investisseur j dans le titre risqué i ($i = 1, \ldots, N$).

Nous définissons la *capitalisation boursière* du titre i par la quantité

$$K_i = \sum_{j=1}^{J} m_{ij} \cdot W_{0j} > 0,$$

et la *capitalisation boursière totale* par

$$K = \sum_{i=1}^{N} K_i = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{J} m_{ij} \cdot W_{0j}.$$

On introduit alors le *portefeuille de marché* agrégeant l'ensemble des portefeuilles risqués individuels des investisseurs:

$$\bar{\mathrm{M}} = (M_1, M_2, \ldots, M_N) \text{ où } M_i = \frac{K_i}{K}.$$

La composante M_k de ce vecteur représente donc la proportion que le marché dans son ensemble a investie dans la valeur k. On suppose de plus qu'il y a équilibre entre les investissements et les emprunts au taux sans risque:

$$\sum_{j=1}^{J} W_{0j} m_{0j} = 0.$$

Il vient alors

$$M_i = \sum_{j=1}^{J} \frac{W_{oj}}{W_0} m_{ij}.$$

Le portefeuille de marché est donc une combinaison linéaire convexe des portefeuilles individuels, supposés efficients, les investisseurs agissant rationnellement, et est ainsi lui-même un portefeuille efficient.

Nous pouvons alors particulariser la relation (5.26) en utilisant:

- comme portefeuille frontière, le portefeuille de marché $\bar{\mathrm{M}}$,
- comme portefeuille quelconque, le portefeuille constitué de la seule valeur risquée i.

Il vient donc

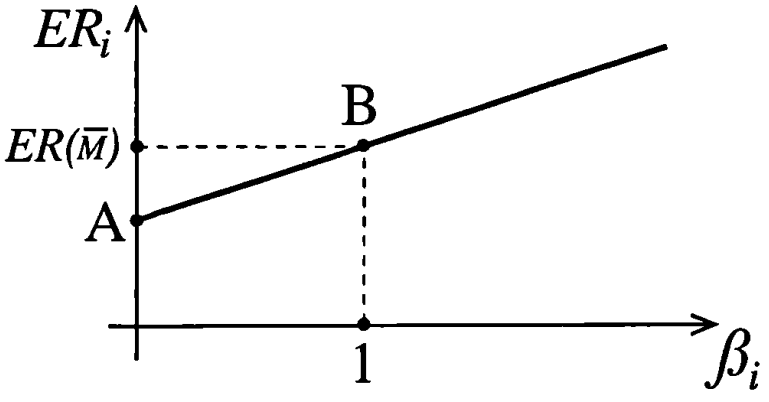
$$\mathrm{E}R_i = r + \beta_i \cdot (\mathrm{E}R(\bar{\mathrm{M}}) - r), \tag{5.27}$$

où le coefficient $\beta_i = \dfrac{cov(R_i, R(\bar{\mathrm{M}}))}{varR(\bar{\mathrm{M}})}$ est appelé le *coefficient bêta* de l'actif i.

La relation (5.27), appelée *Capital Asset Pricing Model* (CAPM) (Sharpe (1964), Lintner (1965)), nous indique que la prime de risque du titre i, donnée par le surcroît de son rendement moyen par rapport au taux sans risque, dépend linéairement de son coefficient bêta, suivant une pente égale à la prime de risque de la totalité du marché.

La droite représentative de cette relation, dans le plan $(\beta_i, \mathrm{E}R_i)$ est appelée

security market line.



Le point A sur la droite est représentatif du titre sans risque. Le point B est représentatif de la totalité du marché.

Le coefficient bêta reflète donc la mesure dans laquelle une variation du marché se répercute sur le titre.

Un titre pour lequel le coefficient $\beta < 1$ (respectivement $\beta > 1$) sera dit *défensif* (respectivement *agressif*).

REMARQUES

a) Il est intéressant de noter la parenté entre le CAPM donné par la relation (5.27), et le modèle de Sharpe (5.15), en identifiant l'indice économique I qui y figure au rendement du portefeuille de marché.

La forme explicative (5.15) devient alors

$$R_i(\omega) = \alpha_i + \beta_i \cdot R(\bar{\mathrm{M}}) + \epsilon_i(\omega)$$

En y posant $\alpha_i = r - \beta_i \mathrm{E}R(\bar{M})$, on a:

$$R_i(\omega) = r + \beta_i(R(\bar{\mathrm{M}}) - r) + \epsilon_i(\omega), \tag{5.28}$$

qui conduit directement au CAPM (5.27).

b) En l'absence de titre sans risque, il convient de généraliser, non plus l'expression (5.25) mais l'expression (5.12), issue de la théorie du portefeuille sans titre non risqué.

En notant M^* le portefeuille frontière conjugué du portefeuille marché $\bar{\mathrm{M}}$, qui lui y est non corrélé, on obtient

$$\mathrm{E}R_i = \mathrm{E}R(\mathrm{M}^*) + \beta_i \cdot (\mathrm{E}R(\bar{\mathrm{M}}) - \mathrm{E}R(\mathrm{M}^*))$$

(*zero-beta capital asset pricing model*, Black (1972), Lintner (1969)).

5.6 Extensions diverses

Nous présentons succinctement et citons ici un certain nombre de généralisations de la théorie du portefeuille et du *Capital Asset Pricing Model.*

5.6.1 Approche par la théorie des fonctions d'utilité

La modélisation des préférences en univers incertain, utilisée par Markowitz et développée dans les paragraphes ci-dessus, est basée sur une approche moyenne-variance, visant à maximiser l'espérance mathématique ("le rendement moyen"), tout en minimisant la variance ("le risque"). Ce problème de choix en univers aléatoire trouve toute sa richesse dans la théorie de l'utilité, qui permet de généraliser l'approche moyenne-variance. Cette dernière se révèlera être un cas particulier, correspondant à une fonction d'utilité quadratique.

La notion d'utilité, introduite déjà par Bernouilli, a été développée par Von Neuman et Morgenstein; dans le cadre de cette théorie, un individu devant opérer un choix entre plusieurs projets risqués, pourra utiliser pour ce, sa propre fonction d'utilité. Celle-ci pourra être construite sous les axiomes suivants:

Axiome 1 (comparabilité)
Entre deux projets A et B, l'individu peut toujours dire s'il préfère A à B ($A \geq B$), B à A ($B \geq A$) ou s'il est indifférent ($A \sim B$); A sera strictement préféré à B ($A > B$) si $A \gtrsim B$ sans que $B \geq A$.

Axiome 2 (transitivité)
Si $A \geq B$ et $B \geq C$ alors $A \geq C$

Axiome 3 (réflexivité)
Pour tout projet A, $A \sim A$

Axiome 4
Pour tout projet A et B tels que $A > B$ et $a, b \in [0,1]$

$$a \cdot A + (1-a) \cdot B > bA + (1-b) \cdot B \text{ ssi } a > b$$

Axiome 5
Pour tout projet A, B, C tels que $A > B > C$, il existe un unique $a \in [0,1]$ tel que $a \cdot A + (1-a) \cdot C \sim B$.

Sous ces hypothèses, il est possible de construire une fonction d'utilité U^* à valeurs réelles représentant la relation de préférence, c'est-à-dire telle que:

$$U^*(A) \geq U^*(B) \text{ ssi } A \geq B \ .$$

En univers incertain, nous considérons que tout projet peut être représenté par les valeurs d'une variable aléatoire (qui peut représenter par exemple la valeur

future d'un portefeuille). On peut alors montrer, sous certaines conditions de continuité, que l'utilité du projet risqué A, modélisé par la variable aléatoire $X(\omega)$ $(\omega \in \Omega)$, peut s'écrire

$$U^*(A) = \mathbf{E}U(X),$$

où U est une fonction d'utilité de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$. Nous supposerons de plus cette fonction U, deux fois dérivable, croissante (comportement rationnel) et concave (aversion pour le risque).

DÉFINITION 1.9

Une fonction d'utilité est une fonction $U : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, deux fois dérivable, telle que

$$U' \geq 0 \text{ et } U'' \leq 0 \quad .$$

Exemples

1) *Utilité linéaire*

$$U(X) = X$$

Dans ce cas, l'utilité d'un projet risqué revient à mesurer l'espérance mathématique de son résultat sans aucune autre considération:

$$U^*(A) = \mathbf{E}X \quad .$$

2) *Utilité quadratique*

$$U(X) = dX - \frac{b}{2}X^2 \qquad (b > 0, X < \frac{d}{b}) \, .$$

L'utilité d'un projet risqué fait intervenir les deux premiers moments de la distribution:

$$U^*(A) = d \cdot \mathbf{E}X - \frac{b}{2} \cdot \mathbf{E}X^2 \, .$$

3) *Utilité exponentielle*

$$U(X) = -\frac{e^{-aX}}{a} \qquad (a > 0) \, .$$

L'utilité d'un projet risqué fait intervenir l'ensemble des moments de la distribution:

$$U^*(A) = -\frac{1}{a}\mathbf{E}e^{-aX} \, .$$

Etant donnée une fonction d'utilité obéissant à la définition 1.9, on peut lui associer son aversion à risque.

DÉFINITION 1.10

- L'*aversion absolue au risque* d'une fonction d'utilité est définie par la fonction

$$A(X) = -\frac{U''(X)}{U'(X)}$$

- On dit qu'un individu i, ayant une fonction d'utilité U_i a une *plus grande aversion risque* qu'un individu j ayant une fonction d'utilité U_j si

$$A_i(X) > A_j(X) \qquad \forall X.$$

(où $A_i(X) = -\frac{U_i''(X)}{U_i'(X)}$ et $A_j(X) = -\frac{U_j''(X)}{U_j'(X)}$).

Exemples

1) *Utilité linéaire*

$$U(X) = X \qquad A(X) = 0$$

(un investisseur utilisant une utilité linéaire - c'est-à-dire un critère d'espérance mathématique - a un degré zéro d'aversion au risque).

2) *Utilité quadratique*

$$U(X) = dX - \frac{b}{2}X^2 \qquad A(X) = \left(\frac{d}{b} - X\right)^{-1}.$$

L'aversion au risque est croissante (ce qui peut sembler critiquable).

3) *Utilité exponentielle*

$$U(X) = -\frac{1}{a}e^{-aX} \qquad A(X) = a.$$

L'aversion au risque est constante.

Application au problème du portefeuille

Dans le cadre du modèle de choix d'un portefeuille $\mathbf{X}$ développé au paragraphe 5.2, on suppose que l'investisseur, plutôt que d'utiliser une approche moyenne-variance, conduisant au problème 2, dispose d'une fonction d'utilité U.

Le problème de choix optimal d'un portefeuille devient alors:

Problème 4

$$\max(\mathbf{E}U(R(\mathbf{X})))$$

sous la contrainte $\sum_{i=1}^{N} X_i = 1$.

On remarquera que l'emploi d'une fonction d'utilité quadratique dans le problème 4, revient à résoudre le problème 2 vu précédemment dans l'approche moyenne-variance.

Comme dans l'approche classique, le problème 4 peut être résolu soit en l'absence de titre non risqué (voir paragraphe 5.2), soit en présence d'un titre non risqué (voir paragraphe 5.4), et déboucher sur un modèle de marché, généralisant le *Capital Asset Pricing Model* vu au paragraphe 5.5.

Nous renvoyons pour les détails à Merton (1982). Résumons simplement ici les résultats obtenus en matière de CAPM avec titre non risqué.

1) *Le risque systématique d'un portefeuille quelconque* m relativement au portefeuille frontière m_e, noté $\beta(\mathrm{m}, \mathrm{m}^e)$ et généralisant l'expression (5.25) est défini par

$$\beta(\mathrm{m}, \mathrm{m}^e) = \frac{cov(U'(R(\mathrm{m}^e)), R(\mathrm{m}))}{cov(U'(R(\mathrm{m}^e)), R(\mathrm{m}^e))} \tag{5.29}$$

2) *Le rendement moyen* d'un portefeuille quelconque m satisfait à la relation suivante où m_e est un portefeuille frontière:

$$\mathrm{E}R(\mathrm{m}) = r + \beta(\mathrm{m}, \mathrm{m}^e) \cdot (\mathrm{E}R(\mathrm{m}^e) - r) \tag{5.30}$$

La prime de risque du portefeuille est directement proportionnelle à son risque systématique. Cette relation généralise directement l'expression (5.26).

3) *En matière de modèle de marché*, il y a lieu comme dans l'approche moyenne-variance de considérer un portefeuille marché. Il convient néanmoins dans ce cadre général d'imposer des conditions sur les fonctions d'utilité des différents investisseurs sur le marché, en vue d'assurer que ce portefeuille marché, combinaison linéaire convexe de portefeuilles efficients, soit lui-même efficient (propriété de convexité de l'ensemble des portefeuilles efficients obtenue dans l'approche moyenne-variance mais non garantie en toute généralité).

Cass et Stiglitz (1970) ont montré qu'il en est ainsi si tous les investisseurs ($j = 1, 2, \ldots, J$) ont des fonctions d'utilité U_j telles que:

$$\text{soit } U_j'(X) = (a_j X + b_j)^{-c} \text{ avec } a_j \cdot c > 0$$

$$\text{soit } U_j'(X) = e^{-a_j X} \qquad a_j > 0.$$

S'il en est ainsi, on obtient la généralisation suivante du CAPM (voir (5.27)):

$$\mathrm{E}R_i = r + \beta_i(\mathrm{E}R(\bar{\mathrm{M}}) - r) \tag{5.31}$$

où :

(a) R_i est le rendement de l'actif i,

(b) r est le taux de l'actif sans risque,

(c) $\bar{\mathrm{M}}$ est le portefeuille de marché,

(d) β_i, appelé *coefficient bêta de l'actif i*, est donné par:

$$\beta_i = \frac{cov(U_M'(R(\bar{\mathrm{M}})), R_i)}{cov(U_M'(R(\bar{\mathrm{M}})), R(\bar{\mathrm{M}}))}$$

où U_M est la fonction d'utilité associée au portefeuille de marché, résultant des fonctions d'utilité des différents investisseurs.

5.6.2 Modèles dynamiques de portefeuille

Les modèles présentés tout au long de la section 5 sont statiques, au sens qu'ils s'intéressent au problème du choix de portefeuille sur une période de temps. D'autres modèles ont été développés, en vue de donner au problème une composante évolutive dans le temps.

Plutôt alors que de se contenter de devoir donner pour chaque actif du marché, une distribution des rendements sur une période, il s'agit de décrire l'évolution dans le temps de la valeur de ces actifs; on pourra donc dans ce cadre utilement s'appuyer sur les modèles stochastiques d'évolution décrits à la section 4.

A titre d'exemple de cette démarche, citons le modèle dit "Intertemporal CAPM" présenté par Merton (1973); celui-ci suppose que les actifs du marché $(i = 1, \ldots, N)$, plutôt que d'être observés sur une période de temps, évoluent continûment dans le temps suivant un modèle brownien géométrique.

Plus précisément, en notant $\{S_i(t,\omega); t \in [0,T]\omega \in \Omega, i = 1, \ldots, N\}$ le processus vectoriel des cours des titres risqués, on suppose que celui-ci est solution du système

$$dS_i(t) = \delta_i \cdot S_i(t)dt + \sigma_i \cdot S_i(t)dw_i(t) \qquad (i = 1, \ldots, N)$$

où

(i) δ_i et σ_i sont des constantes,

(ii) $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_N)$ est un mouvement brownien standard N-dimensionnel corrélé. Merton développe dans ce cadre, une généralisation du *Capital Asset Pricing Model.*

Un autre modèle dans ce cadre, visant à la sélection optimale d'un portefeuille, et basé simultanément sur l'utilisation de semi-martingales (voir paragraphe 4.7) et des fonctions d'utilité, (voir paragraphe 5.6.1) a été développé par Aase (1984).

Ce dernier suppose que les cours des actifs satisfont à

$$dS_i(t) = S_i(t^-)dI_i(t) \qquad (i = 1, \ldots, N)$$

où les flux de rendement I_i ont la forme (voir (4.23)):

$$I_i(t,\omega) = \int_0^t \delta_i(s,\omega)ds + \int_0^t \sigma_i(s,\omega)dw_i(s,\omega) + \sum_{j|S_j \leq t} m_j(\omega).$$

La fortune de l'investisseur, notée par le processus $\{W(t,\omega), t \in [0,T], \omega \in \Omega\}$ est supposée investie parmi les N actifs.

On notera $\{\rho_i(t,\omega), t \in [0,T], \omega \in \Omega\}$ le processus représentant la part investie dans l'actif i $(i = 1, \ldots, N)$.

Ce processus est soumis à la condition

$$\sum_{i=1}^{N} \rho_i(t,\omega) = 1 \qquad \forall t\ .$$

Si de plus les ventes à découvert sont interdites, il y a lieu d'ajouter les contraintes de positivité

$$\rho_i(t,\omega) \geq 0 \qquad i = 1,\ldots,N \qquad \forall t.$$

Compte tenu d'une fonction d'utilité donnée de l'investisseur, le problème du choix optimal revient à déterminer la stratégie optimale stochastique ρ^* maximisant

$$\mathbf{E}[U(W(T))].$$

La solution de ce problème nécessite l'utilisation de techniques de programmation dynamique et de contrôle optimal stochastique.

Des solutions explicites peuvent notamment être obtenues dans le cas d'une fonction d'utilité logarithmique.

Chapitre 2
Les obligations

1 Introduction

Il peut sembler quelque peu paradoxal de traiter, dans un cadre aléatoire, des obligations, à première vue le modèle type de titres sans risque.

En effet, contrairement aux actions, les obligations classiques sont caractérisées par des éléments de certitude importants:

- la durée de vie fixée du titre,
- les revenus générés par le titre ainsi que sa valeur de remboursement au terme de sa durée de vie.

En réalité, comme nous le montrerons, le risque financier n'est nullement absent des obligations et y est intrinsèquement associé à l'évolution de la structure des taux d'intérêt; la section 3 illustrera cette facette aléatoire à partir de quelques exemples simples. Nous développerons ensuite les modèles dynamiques stochastiques de structure des taux d'intérêt, qui conditionnent l'évaluation de la valeur des obligations.

Compte tenu de la présence de cette incertitude, des stratégies de protection ont été développées; il s'agit des théories d'immunisation qui seront présentées à la section 6.

Enfin, tenant compte de cet environnement financier aléatoire et de son influence sur les titres obligataires, de nouveaux types d'obligations sont apparus; les obligations à taux variable seront ainsi introduites à la section 7.

2 Définitions générales

Nous rappelons ici succinctement quelques notions de base liées aux obligations.

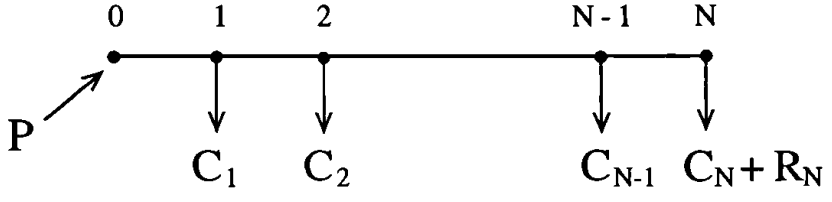
2.1 Les obligations

Une *obligation* est un titre financier représentatif d'un prêt octroyé à un tiers et donnant droit à la réception de différents flux financiers fixés à des dates d'échéances futures fixées.

Ces flux sont de deux natures:

- d'une part, des versements d'intérêt appelés généralement *coupons*, versés à intervalles réguliers;
- d'autre part, le remboursement du prêt effectué le plus souvent en une fois au terme de la durée de vie de l'obligation.

Schématiquement, nous noterons à l'émission du titre:



où P = prix initial de l'obligation (prix d'émission),

N = durée de vie (ou maturité),

C_i = coupon au temps i,

R_N = valeur de remboursement au temps N.

Une obligation, à son émission, est donc caractérisée par son prix d'émission, sa durée, ses coupons et sa valeur de remboursement.

2.2 Les obligations à coupons et zéro-coupon

Une *obligation à coupons* est une obligation dont au moins un des coupons strictement antérieur au terme est non nul.

Une *obligation zéro-coupon* est une obligation dont tous les coupons sont nuls; un tel titre ne génère donc qu'un seul flux financier: la valeur de remboursement.

2.3 Les obligations à taux fixe et à taux variable

Une *obligation à taux fixe* est une obligation à coupon pour laquelle le montant des coupons est fixé à l'émission. Les coupons sont généralement égaux.

Une *obligation à taux variable* est une obligation à coupons pour laquelle le montant des coupons varie en fonction de l'évolution d'un indice défini à l'émission; les coupons y présentent donc un caractère aléatoire. Ces titres seront étudiés à la section 7.

2.4 Les obligations classiques

Nous appellerons dans la suite *obligation classique* une obligation à coupon, à taux fixe, pour laquelle tous les coupons sont égaux.

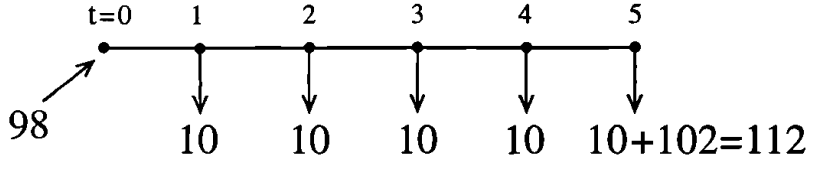
Le *taux d'intérêt* nominal est alors défini comme le rapport entre la valeur d'un coupon et la valeur nominale du titre.

Le prix d'émission est généralement égal à la valeur nominale du titre, mais il peut lui être inférieur: on parle alors de *prime d'émission.* De même, la valeur de remboursement peut être supérieure à la valeur nominale. On parle de *prime de remboursement.*

EXEMPLE 2.1

- prix d'émission : 98
- taux d'intérêt nominal : 10%
- valeur nominale : 100
- valeur de remboursement : 102
- durée : 5 ans

Un tel titre, qui contient une prime d'émission de 2 et une prime de remboursement de 2, est caractérisé par les flux suivants:



Le taux de rendement actuariel à l'émission est le taux qui rend équivalent le prix d'émission, et la valeur actuelle des coupons et de la valeur de remboursement.

Dans le cas d'une obligation classique, celui-ci est donc défini par la relation

$$P = \sum_{i=1}^{N} \frac{C}{(1+r)^i} + \frac{R}{(1+r)^N}, \tag{2.1}$$

où P = prix d'émission,
C = valeur du coupon,
R = valeur de remboursement,
N = durée,
r = taux de rendement actuariel.

Dans le cas limite d'une obligation zéro-coupon, la relation (2.1) prend la forme simple

$$P = \frac{R}{(1+r)^N}. \tag{2.2}$$

Une obligation classique sans prime d'émission ni prime de remboursement a un taux de rendement actuariel à l'émission égal à son taux nominal. La présence d'une prime d'émission ou de remboursement accroît ce taux de rendement.

EXEMPLE 2.2

Le titre de l'exemple 2.1, de taux nominal égal à 10%, a un taux de rendement actuariel r défini par:

$$98 = \frac{10}{1+r} + \frac{10}{(1+r)^2} + \frac{10}{(1+r)^3} + \frac{10}{(1+r)^4} + \frac{112}{(1+r)^5}.$$

3 Les obligations et le risque financier

3.1 Position du problème

Les obligations à taux fixe telles que présentées à la section 2 semblent être un instrument financier sans risque.

En effet, contrairement aux actions, les flux sont parfaitement déterminés à l'origine et présentent un caractère certain.

Ceci nous a permis d'introduire la notion de *taux de rendement actuariel à l'émission* (rendement *ex ante*).

Il convient d'être particulièrement attentif à l'interprétation à donner à ce taux de rendement. S'il correspond à l'émission de l'obligation, au taux d'intérêt qui égalise la valeur actuelle du flux d'investissement et des flux de retour, il ne correspond presque jamais au *taux de rendement à l'échéance*, c'est-à-dire au rendement effectif de l'opération à son terme (rendement *ex post*).

Il ne correspond pas non plus au *taux de rendement anticipé*, c'est-à-dire au rendement effectif de l'opération en cas de revente du titre avant le terme.

En vue d'introduire ces deux notions de rendement *a posteriori*, notons $W(t)$ = fortune de l'investisseur au temps t $(0 \leq t \leq N)$ résultant de son investissement initial dans l'obligation. On a donc: $W(0) = P$ = prix initial de l'obligation.

Au terme de l'obligation, la fortune, $W(N)$ résulte:

- d'une part, de la valeur de remboursement R_N
- d'autre part, de l'accumulation des coupons encaissés.

Le *taux de rendement à l'échéance* r_e est alors défini par la relation

$$W(N) = W(0) \cdot (1 + r_e)^N. \tag{3.1}$$

Il représente donc bien le taux de rentabilité moyen d'un investissement sur N années faisant passer la fortune de $W(0)$ à $W(N)$; c'est le rendement réel obtenu *a posteriori* par l'investissement.

Ce taux de rendement à l'échéance r_e coïncide-t-il avec le taux de rendement actuariel à l'émission r?

En vue d'analyser ce taux r_e, considérons le cas particulier d'une obligation à taux fixe sans prime d'émission ni prime de remboursement. On a donc dans ce cas

$$P = R_N = W(0),$$

et

$$r = \frac{C}{P}.$$

Quant à la fortune finale $W(N)$, une première approche consisterait à la définir par la somme de la valeur de remboursement et de la somme arithmétique des coupons:

$$W(N) = P + N \cdot C, \tag{3.2}$$

et on aurait alors suivant (3.1):

$$(1 + r_e)^N = \frac{P + N \cdot C}{P},$$

ou

$$(1 + r_e)^N = 1 + N \cdot \frac{C}{P},$$

ou

$$(1 + r_e)^N = 1 + N \cdot r$$

et donc généralement $r_e < r$.

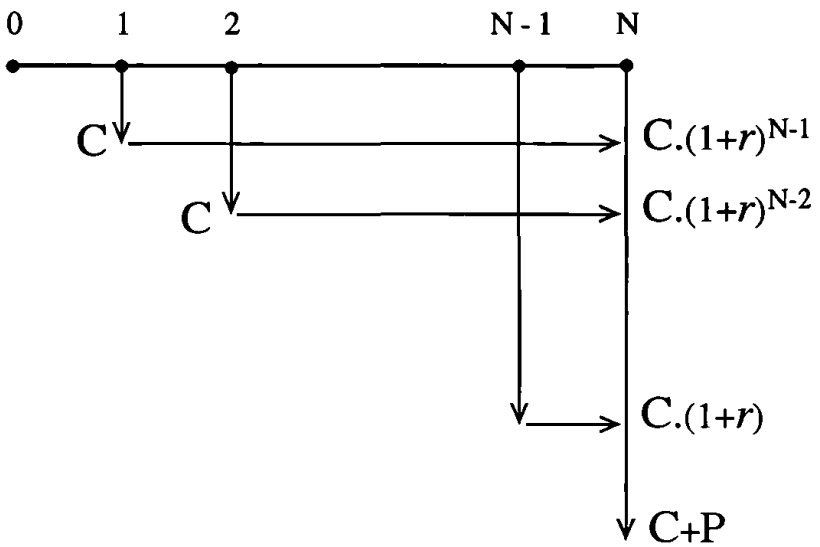
Exemple

Si $r = 10\%$ et $N = 8$ ans, alors $r_e = 7,62\%$.

Ce résultat n'est nullement surprenant; en effet, la relation (3.2) suppose que les coupons successifs ne sont pas replacés, mais simplement encaissés. Ceci occassionne bien sûr une perte de rentabilité.

Supposons à présent que les coupons successifs soient eux-mêmes replacés à un taux de rendement égal au taux de rendement actuariel r jusqu'au terme.

Schématiquement on a:



Il vient dans ce cadre

$$\begin{aligned} W(N) &= P + C + C(1+r) + C(1+r)^2 + \ldots + C(1+r)^{N-1} \\ &= P + C \cdot \frac{(1+r)^N - 1}{r} \ , \end{aligned}$$

et le taux de rendement à l'échéance devient

$$\begin{aligned} (1+r_e)^N &= \frac{P + C \cdot \frac{(1+r)^N - 1}{r}}{P} \\ &= 1 + \frac{C}{P} \cdot \frac{(1+r)^N - 1}{r} = 1 + r\frac{(1+r)^N - 1}{r} = (1+r)^N \ , \end{aligned}$$

et donc

$$r_e = r.$$

CONCLUSION

Le taux de rendement actuariel à l'émission coïncide avec le taux de rendement à l'échéance si les coupons successifs sont replacés à un taux de rendement

égal à ce taux de rendement actuariel à l'émission.

COROLLAIRE

Le taux de rendement à l'échéance dépend des conditions de réinvestissements des coupons tout au long de l'opération.

Il apparaît donc ici, dans le rendement effectif que rapporte l'obligation un risque financier puisqu'*a priori* les conditions futures de réinvestissement des coupons sont inconnues et se feront suivant les taux en vigueur aux différentes échéances des coupons.

Ce ne serait que dans le cas hypothétique où les taux du marché restaient stables tout au long de l'opération, que le rendement à l'échéance coïnciderait avec le taux actuariel à l'émission.

Si, plutôt que de conserver l'obligation jusqu'à son terme, l'investisseur décide de s'en séparer prématurement et donc de revendre anticipativement le titre, il s'expose également à un risque financier.

En effet, dans ce cas, le prix de revente obtenu sera égal à la valeur actuelle à l'instant de la vente des flux de retour futurs, calculée à un taux d'actualisation correspondant aux conditions du marché à cet instant. Le vendeur se trouve donc également exposé dans ce cas au risque de variation des taux d'intérêt sur le marché.

En particulier, le rendement obtenu sur la vie de l'obligation, appelé taux de rendement anticipé, ne correspondra généralement pas au taux de rendement actuariel à l'émission.

3.2 Exemple

En vue de visualiser l'ensemble de ces risques de taux, considérons l'exemple suivant.

EXEMPLE 2.3

Soit une obligation à taux fixe dont les caractéristiques à l'émission sont les suivantes:

- prix d'émission, valeur nominale et valeur de remboursement: 100,
- taux d'intérêt nominal : 10%,
- durée : 8 ans.

Le taux de rendement actuariel à l'émission de ce titre est bien sûr de 10%.

En vue de modéliser le risque de variation des taux d'intérêt sur le marché, considérons les deux scénarios suivants:

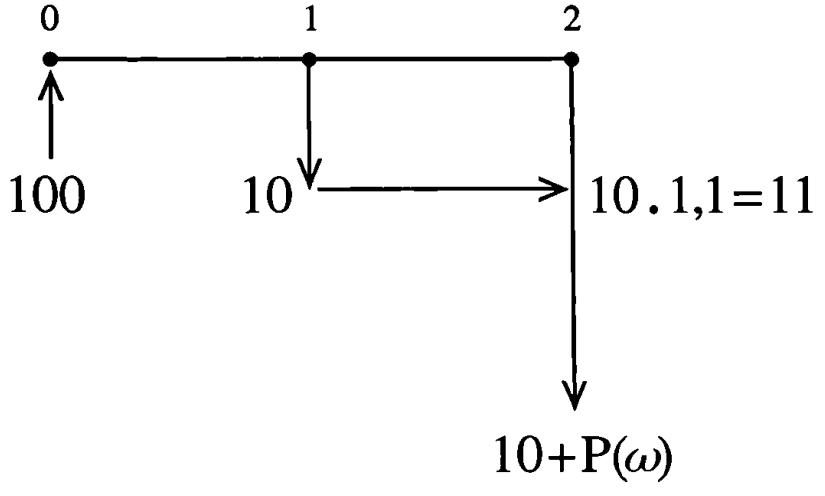
scénario 1 (ω_1): le taux monte de 10% à 12% sur le marché à l'instant $t = 2$;
scénario 2 (ω_2): le taux descend de 10% à 8% sur le marché à l'instant $t = 2$.

Nous supposerons qu'il n'y a pas d'autres modifications sur l'horizon de 8 ans.

L'investisseur désire, dans les 2 hypothèses ω_1 et ω_2, connaître le taux de rendement effectif dans les 3 cas suivants:
- s'il revend directement après la modification de taux;
- s'il revend anticipativement en $t = 5$;
- s'il conserve le titre jusqu'à son terme.

Les rendements obtenus seront bien sûr à comparer au taux de rendement actuariel à l'émission de 10%.

a) Vente au moment de la variation de taux ($t = 2$)
L'opération peut être schématisée ainsi:



La fortune totale obtenue après revente en $t = 2$, $W(2)$, est composée:
- du coupon en $t = 1$, capitalisé un an à 10%,[1]
- du coupon en $t = 2$,
- du prix $P(\omega)$ de revente en $t = 2$, variant suivant le scénario considéré.

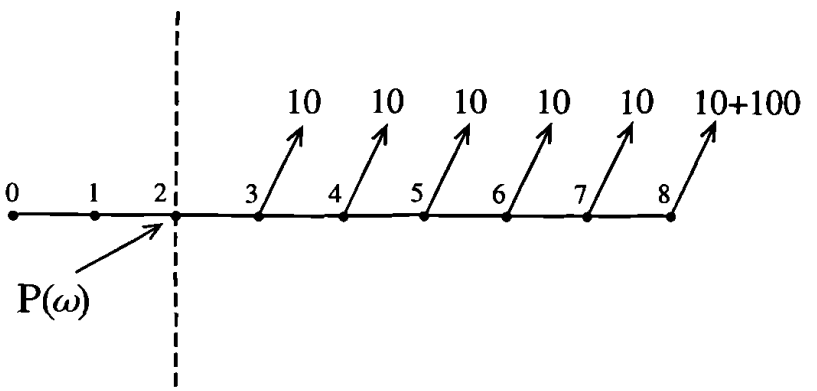
Ce prix est donné par:

$$P(\omega) = 10 \cdot \frac{1}{(1 + r(\omega))} + 10 \cdot \frac{1}{(1 + r(\omega))^2} + \ldots + 10 \cdot \frac{1}{(1 + r(\omega))^6} + \frac{100}{(1 + r(\omega))^6},$$

[1]Nous supposerons ici que les coupons sont réinvestis pour des durées successives d'un an à un taux égal au taux du marché. Ceci équivaut, comme nous le verrons dans la suite, à travailler avec une structure plate des taux d'intérêt.

où

$$r(\omega_1) = 12\%$$
$$r(\omega_2) = 8\%.$$



Il vient

$$P(\omega_1) = \sum_{i=1}^{6} \frac{10}{(1,12)^i} + \frac{100}{(1,12)^6} = 91,78$$
$$P(\omega_2) = \sum_{i=1}^{6} \frac{10}{(1,08)^i} + \frac{100}{(1,08)^6} = 109,25.$$

Les taux de rendements anticipés $r_a(\omega)$ sont alors donnés par la relation d'équivalence:

$$100 \times (1 + r_a(\omega))^2 = 11 + 10 + P(\omega),$$

égalant la valeur actualisée en $t = 2$ du flux d'investissement et des flux de retour, en ce compris le prix de revente; d'où

$$r_a(\omega_1) = \sqrt{\frac{11 + 10 + P(\omega_1)}{100}} - 1 = 0,062 \text{ soit } 6,2\%$$
$$r_a(\omega_2) = \sqrt{\frac{11 + 10 + P(\omega_2)}{100}} - 1 = 0,141 \text{ soit } 14,1\%.$$

Le lecteur pourra s'assurer sans peine que si le taux du marché était resté à 10%, d'une part, le prix de revente obtenu aurait été de 100, d'autre part,

le taux de rendement anticipé aurait été de 10%, soit le taux de rendement actuariel à l'émission.

Conclusion

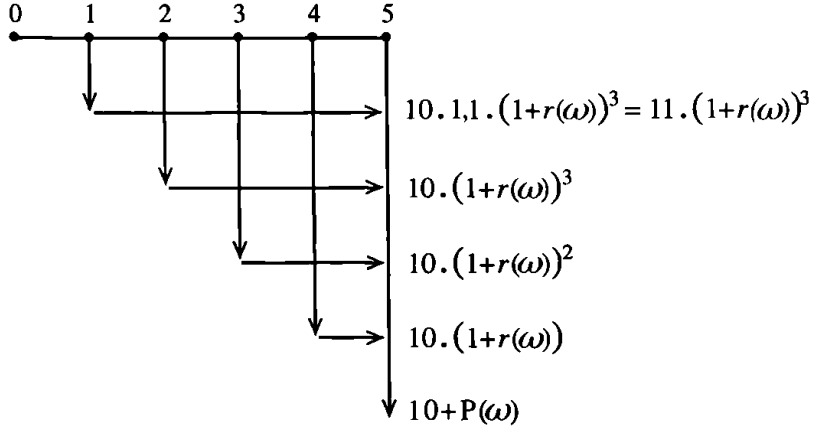
Une hausse du taux d'intérêt sur le marché a pour effet de dévaloriser le titre et conduit à un prix de revente inférieur à la valeur nominale. Le taux de rendement anticipé est influencé par ce prix de revente inférieur et est largement inférieur au taux de rendement actuariel à l'émission.

On observera, dans l'exemple envisagé, l'effet brutal de chute du taux de rendement anticipé: en cas de revente juste avant une modification de taux (par exemple en $t = 1,9$), le taux de rendement anticipé aurait encore été de 10%.

b) Vente anticipative en $t = 5$

Dans ce cas, la modification de taux du marché survenue à l'instant $t = 2$, n'influence bien sûr pas le montant des coupons mais altère les possibilités de réinvestissements de ces derniers et le prix de revente obtenu en $t = 5$.

L'opération peut être schématisée ainsi:



où $r(\omega_1) = 12\%$ et $r(\omega_2) = 8\%$.

La fortune totale obtenue après revente en $t = 5$, $W(5)$, est composée:
- des coupons successifs, capitalisés, entre $t = 1$ et $t = 2$, à 10%, et entre $t = 2$ et $t = 5$ à 12% ou 8% suivant le scénario envisagé;
- du prix $P(\omega)$ de revente en $t = 5$, variant également suivant le scénario.

Il apparaît donc ici un double risque de taux:
- le *risque de réinvestissement* provenant des conditions *a priori* inconnues de réinvestissement des coupons encaissés;
- le *risque de réalisation* sur le prix lors de la revente anticipée, déjà rencontré précédemment.

Ce prix est donné par

$$P(\omega_1) = \sum_{i=1}^{3} \frac{10}{(1,12)^i} + \frac{100}{(1,12)^3} = 95,20$$

$$P(\omega_2) = \sum_{i=1}^{3} \frac{10}{(1,08)^i} + \frac{100}{(1,08)^3} = 105,15.$$

Les taux de rendement anticipés $r_a(\omega)$ sont donnés par la relation d'équivalence

$$100 \cdot (1 + r_a(\omega))^5 = 11 \cdot (1 + r(\omega))^3 + 10 \cdot (1 + r(\omega))^3 + 10 \cdot (1 + r(\omega))^2$$

$$+10 \cdot (1 + r(\omega)) + 10 + P(\omega),$$

égalant la valeur actualisée en $t = 5$ du flux d'investissement et des flux de retour.

Dans cette expression:
- le *risque de réinvestissement* est modélisé par le taux $r(\omega)$;
- le *risque de réalisation* est modélisé par le prix $P(\omega)$.

Suivant le scénario envisagé, on obtient:

$$r_a(\omega_1) = \sqrt[5]{\frac{11 \cdot (1,12)^3 + 10 \cdot (1,12)^3 + 10 \cdot (1,12)^2 + 10 \cdot 1,12 + 10 + 95,20}{100}} - 1 = 9,64\%$$

$$r_a(\omega_2) = \sqrt[5]{\frac{11 \cdot (1,08)^3 + 10 \cdot (1,08)^3 + 10 \cdot (1,08)^2 + 10 \cdot 1,08 + 10 + 105,15}{100}} - 1 = 10,41\%$$

Le lecteur pourra à nouveau s'assurer que pour un taux de marché r de 10%, le taux de rendement anticipé aurait été également de 10%.

Conclusion

La variation de taux d'intérêt agit de manière opposée sur les 2 risques mentionnés plus haut.

Ainsi, une hausse du taux d'intérêt:

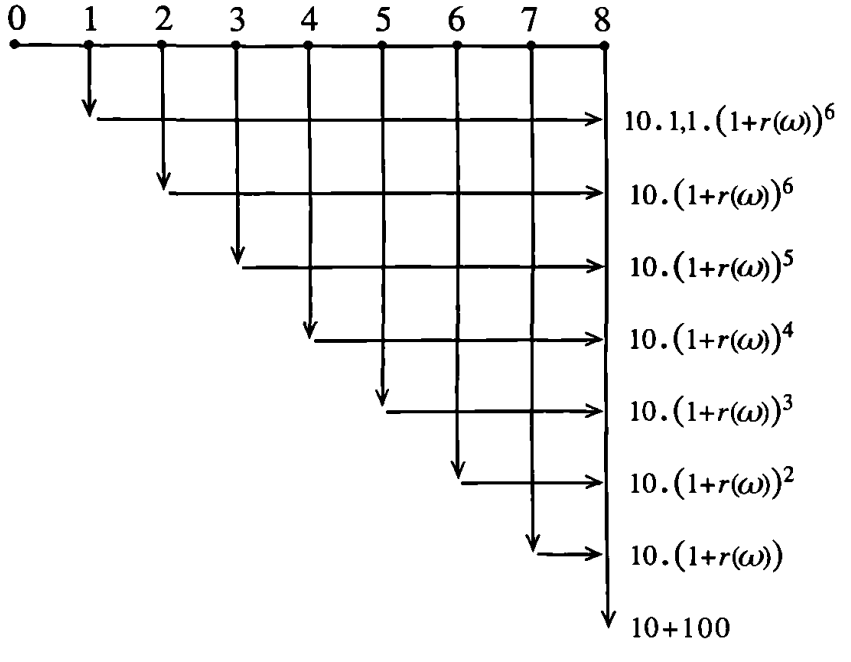
- provoque une baisse du prix de revente, ce qui diminue, le taux de rendement anticipé;
- augmente le produit du réinvestissement des coupons, ce qui augmente le taux de rendement anticipé.

On assiste ainsi à un certain rééquilibrage du taux de rendement autour du taux initial de 10%, quel que soit le scénario envisagé. Cette constatation est à la base des théories de l'immunisation que nous étudierons à la section 6.

c) Vente au terme de l'obligation

Dans ce cas, l'obligation étant vendue au terme à son prix de remboursement convenu, soit 100 dans le cas présent, la modification de taux en $t = 2$ n'affecte plus le prix de vente, mais altère toujours les possibilités de réinvestissement des coupons; c'est donc ici uniquement le risque de réinvestissement qui subsiste.

L'opération peut être schématisée:



où $r(\omega_1) = 12\%$ et $r(\omega_2) = 8\%$.

On retrouve le risque attaché au taux de rendement à l'échéance r_e, introduit plus haut, et défini dans le cas présent par la relation d'équilibre

$$100 \cdot (1 + r_e(\omega))^8 = 10 \cdot 1,1 \cdot (1 + r(\omega))^6 + 10 \cdot \sum_{i=0}^{6} (1 + r(\omega))^i + 100,$$

soit, suivant les scénarios envisagés:

$$\begin{aligned} r_e(\omega_1) &= \sqrt[8]{\frac{11 \cdot (1,12)^6 + \sum_{i=0}^{6} 10 \cdot (1,12)^i + 100}{100}} - 1 = 10,52\% \\ r_e(\omega_2) &= \sqrt[8]{\frac{11 \cdot (1,08)^6 + \sum_{i=0}^{6} 10 \cdot (1,08)^i + 100}{100}} - 1 = 9,47\%. \end{aligned}$$

Conclusion

On assiste ici à un retournement de tendance. C'est le scénario ω_1 de hausse de taux qui conduit au rendement supérieur, et ce compte tenu

- de l'absence de risque de réalisation, le titre étant vendu à son terme;
- de l'effet bénéfique de réinvestissement des coupons à un taux supérieur.

4 Structure par terme des taux d'intérêt

L'exemple 2.3 d'évolution du prix d'une obligation présenté à la section 3 a montré, d'une part, le caractère aléatoire des titres obligataires, d'autre part, leur indissociable liaison à l'évolution des taux sur le marché.

Ceci conduit donc à s'intéresser aux modèles de structure des taux d'intérêt, et à leur évolution dans le temps.

Nous introduisons ici le sujet et définissons les principaux concepts des théories dites de structure par terme des taux d'intérêt. Nous aborderons ensuite à la section 5 les modélisations stochastiques en la matière.

4.1 Constatations empiriques

L'observation, à un instant donné, des taux de rendement *ex ante* (taux défini comme en (2.1) égalant la valeur actuelle du flux d'investissement et des flux de retour), de l'ensemble des titres à revenus fixes d'un marché, fait apparaître des différences importantes.

Deux facteurs explicatifs principaux sont retenus pour justifier ces différences de rendement: la *qualité de l'émetteur* et la *maturité*. La *qualité de l'émetteur* se reflète dans son risque de défaut éventuel: plus ce dernier est élevé, plus le rendement réclamé par l'investisseur sera élevé; cet aspect de la théorie obligataire liée aux émetteurs privés ne nous intéressera pas dans la suite. Nous nous limiterons au cas d'émetteurs publics supposés sans défaut.

La variation des taux selon la *maturité* de l'instrument obligataire retiendra en revanche toute notre attention; elle est à la base des théories explicatives classiques et des modèles dynamiques stochastiques de structure des taux d'intérêt. Elle se reflète dans les notions courantes de taux court terme et taux long terme.

Les théories de structure par terme des taux d'intérêt ont pour ambition de chercher à comprendre pourquoi des titres dont les caractéristiques sont identiques, à l'exception de la maturité, ont des rendements différents.

Une première approche intuitive à ce problème consiste à tenter de limiter l'analyse à la durée de vie des titres, et à en comparer le rendement actuariel, fonction de la maturité.

Malheureusement, comparer des titres pouvant présenter des structures de coupons différentes, sur la seule base du taux de rendement, peut se réveler inadéquat, compte tenu de la problématique du réinvestissement des coupons déjà évoqué.

Pour contourner cette difficulté liée aux répartitions temporelles de coupon, il est plus simple de se limiter à l'*étude de la structure de taux d'obligations zéro-coupon.*

D'autre part, toute obligation pouvant être décomposée en une somme d'obligations zéro-coupon pour chacun des flux financiers qu'elle engendre, la connaissance de la structure des taux zéro-coupon, donc du prix des obligations zéro-coupon, permet d'obtenir le prix de toute obligation.

Sauf mention contraire, nous ne nous intéresserons donc plus dans la suite de la section 4, qu'aux obligations zéro-coupon, notre objectif étant d'en étudier la structure des taux.

4.2 Définitions des courbes de taux

Nous nous placerons dans le cadre simple déterministe d'un modèle discret dans le temps, l'espace des temps étant noté $T = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

On suppose que l'on dispose en $t = 0$ d'une obligation zéro-coupon pour chaque maturité $s \in T$. La *structure des prix* de ces obligations, en $t = 0$, pour une valeur de remboursement unitaire, sera notée

$$\{P(0,s), s \in T\}$$

La structure des *taux au comptant* $\{R(0,s), s \in T\}$ est définie par la relation

$$P(0,s) = \frac{1}{(1+R(0,s)^s} \qquad (s \in T). \tag{4.1}$$

Le taux au comptant de maturité s représente donc le taux de rendement actuariel d'une obligation zéro-coupon de durée s.

Cette structure de taux au comptant contient intrinsèquement des renseignements sur l'avenir, au travers de conditions de placement garanties en $t = 0$, sur des périodes futures.

Cette information future est mise en évidence par la structure dite des *taux à terme* $\{r(0,s), s \in T\}$ définie par

$$P(0,s) = \frac{1}{(1+r(0,1))(1+r(0,2))\ldots(1+r(0,s))}. \tag{4.2}$$

La structure des taux à terme peut être obtenue, par récurrence, à partir de la structure des taux au comptant:

$$\begin{aligned} 1+R(0,1) &= 1+r(0,1) \\ (1+R(0,2))^2 &= (1+r(0,1))(1+r(0,2)) \\ (1+R(0,3))^3 &= (1+r(0,1))(1+r(0,2))(1+r(o,3)) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Le taux à terme de maturité $s, r(0,s)$, représente donc le taux de rendement octroyé pour la période $(s-1,s)$, vu depuis l'instant initial $t=0$.

Comme précisé ci-avant, la connaissance de ces structures permet de tarifer toute obligation à coupons. Ainsi, le prix en $t=0$, d'une obligation B, donnant droit aux coupons C_i aux temps i $(i=1,\ldots,N)$, et au remboursement R_N au temps N, est donné par

$$\begin{aligned} B(0) &= C_1 \cdot P(0,1) + C_2 \cdot P(0,2) \ldots + C_{N-1} \cdot P(0,N-1) \\ &\quad +(C_N + R_N)P(0,N) \\ &= \frac{C_1}{(1+R(0,1))} + \frac{C_2}{(1+R(0,2))^2} + \ldots + \frac{C_{N-1}}{(1+R(0,N-1))^{N-1}} \\ &\quad + \frac{C_N + R_N}{(1+R(0,N))^N} \end{aligned} \tag{4.3}$$

La *structure* des taux est dite *plate*, lorsque les taux sont indépendants de la maturité:

$$R(0,s) = r(0,s) = r \qquad (s \in T).$$

La *structure* des taux au comptant est dite *croissante* lorsque les taux au comptant forment une suite croissante:

$$R(0,1) < R(0,2) \ldots < R(0,s).$$

La *structure* des taux au comptant est dite *décroissante* (ou *inversée*) lorsque les taux au comptant forment une suite décroissante:

$$R(0,1) > R(0,2) \ldots > R(0,s).$$

Les notions de structure, présentées ci-dessus, ont été définies dans un cadre statique, s'agissant de la situation observée depuis l'instant initial $t = 0$.

Les modèles dynamiques de structure des taux s'intéressent eux à l'évolution dans le temps et aux éventuelles déformations des courbes de taux.

Les diverses structures définies précédemment, peuvent être généralisées sans peine, en des instants ultérieurs.

a) *Structure des prix* à l'instant $n \in T$:

$$\{P(n,s); s \in T\},$$

$P(n,s)$ représentant le prix à l'instant n d'une obligation zéro-coupon de durée s (échéant à l'instant $n+s$).

b) *Structure des taux au comptant* à l'instant $n \in T$:

$$\{R(n,s); s \in T\},$$

$R(n,s)$ représentant le taux de rendement actuariel à l'instant n d'une obligation zéro-coupon de durée s (échéant à l'instant $n+s$), défini par la relation

$$P(n,s) = \frac{1}{(1+R(n,s))^s}. \tag{4.4}$$

c) *Structure des taux à terme* à l'instant $n \in T$:

$$\{r(n,s); s \in T\},$$

$r(n,s)$ représentant le taux de rendement octroyé pendant la période $(n+s-1, n+s)$ vu depuis l'instant n, défini par la relation

$$P(n,s) = \frac{1}{(1+r(n,1))(1+r(n,2))\dots(1+r(n,s))}. \tag{4.5}$$

Etudier la dynamique de la structure des taux consiste alors à relier les structures de prix et de taux, relatives à des instants différents d'observation.

Dans le cadre d'un *modèle déterministe de certitude*, sans opportunité d'arbitrage, ces relations sont univoques et peuvent être explicitées simplement. En effet, dans ce cas, les taux à terme relatifs à une même période de temps doivent tous coïncider, quel que soit l'instant de mesure. Ceci peut s'exprimer par la relation de récurrence

$$r(n,s) = r(n-1, s+1). \tag{4.6}$$

Etant donné la structure initiale des taux à terme $\{r(0,1), r(0,2), r(0,3), \dots\}$, les structures aux instants suivants s'obtiennent donc simplement en supprimant à chaque fois le premier élément de la suite:

$$\begin{aligned}
\bar{r}(0) &= \{r(0,1), r(0,2), r(0,3), \dots\} \\
&\downarrow \\
\bar{r}(1) &= \{r(1,1), r(1,2), r(1,3), \dots\} = \{r(0,2), r(0,3), \dots\} \\
&\downarrow \\
\bar{r}(2) &= \{r(2,1), r(2,2), r(2,3), \dots\} = \{r(0,3), \dots\}
\end{aligned}$$

La relation de récurrence (4.6) relative aux taux à terme permet de générer une relation de récurrence pour les taux au comptant, et par la même, pour les prix.
On a:

$$\begin{aligned}(1+R(n,s))^s &= (1+r(n,1))(1+r(n,2))\dots(1+r(n,s)) \\ &= (1+r(n-1,2))(1+r(n-1,3))\dots(1+r(n-1,s+1)) \\ &= (1+R(n-1,s+1))^{s+1}/(1+R(n-1,1)),\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}P(n,s) &= P(n-1,s+1)\cdot(1+R(n-1,1)) \\ &= P(n-1,s+1)/P(n-1,1).\end{aligned} \tag{4.7}$$

Dans ce modèle de certitude, on remarquera en particulier le lien entre taux à terme et taux au comptant:

$$r(n,s) = r(n+1,s-1) = \dots = r(n+s-1,1) = R(n+s-1,1)$$

Le taux à terme prédit donc de manière précise la valeur future du taux au comptant pour une durée unitaire.

Lorsque l'incertitude sur l'évolution des taux est prise en compte, ces relations simples ne sont plus vérifiées, les structures de taux pouvant notamment subir des mouvements ou des chocs venant contredire la relation naïve (4.6).

Les modèles stochastiques de structure de taux d'intérêt présentés dans la suite ont pour ambition d'enrichir, dans un univers incertain, l'approche élémentaire déterministe.

Remarques

1) Il est possible sans difficultés de généraliser en temps continu le modèle déterministe discret présenté ci-dessus.

On dispose dans ce cas, d'une obligation zéro-coupon pour chaque maturité $s \in [0,T] \subset \mathbb{R}^+$, de prix noté $P(0,s)$, pour une valeur de remboursement unitaire.

On suppose de plus que cette fonction prix peut se mettre sous la forme

$$P(0,s) = e^{-sR(0,s)},$$

où $R(0,s)$ est le *taux au comptant* de maturité s.

En supposant cette dernière fonction dérivable, on peut introduire la notion de taux à terme par le biais de la relation

$$P(0,s) = \exp - \int_0^s r(0,\tau)d\tau,$$

où $r(0,\tau)$ est le *taux à terme* à l'instant τ; il s'agit donc d'un taux instantané futur.

Les taux au comptant et à terme sont liés par la relation

$$R(0,s) = \frac{1}{s}\int_0^s r(0,\tau)d\tau.$$

Le cas d'une structure plate de taux conduit aux relations classiques à intérêts composés:

a) $R(0,s) = r(0,s) = r \qquad (s \in [0,T])$

b) $P(0,s) = e^{-rs}$

L'évolution de la structure aux instants subséquents sera notée ainsi:

(i) $P(t,s)$ = *prix* à l'instant t d'une obligation zéro-coupon échéant à l'instant s $(t \leq s \leq T)$;

(ii) $R(t,s)$ = *taux au comptant* à l'instant t d'une obligation zéro-coupon échéant à l'instant s, défini par:

$$P(t,s) = \exp(-(s-t)\cdot R(t,s));$$

(iii) $r(t,s)$ = *taux à terme* à l'instant s vu depuis l'instant t, défini par:

$$P(t,s) = \exp -\int_t^s r(t,\tau)d\tau.$$

Le modèle déterministe de certitude conduit à l'identité des taux à terme:

$$r(t,s) = r(t',s) \qquad (t,t' \leq s \leq T).$$

2) Par analogie de notation, nous utiliserons parfois par la suite, également dans des modèles discrets, une notation exponentielle pour les taux à terme et au comptant. Dans ce cas, les relations discrètes (4.4) et (4.5) deviennent respectivement:

$$P(n,s) = \exp(-s\cdot R(n,s)),$$

et

$$P(n,s) = \exp\left(-\sum_{j=1}^{s} r(n,j)\right). \tag{4.8}$$

Le mode de notation utilisé pour ces taux sera précisé par la suite.

5 Modèles stochastiques de structure des taux d'intérêt

On peut classer les modèles stochastiques d'évolution de la structure temporelle des taux d'intérêt, selon la méthodologie utilisée, en diverses familles. Nous présenterons ici trois démarches:

a) *les modèles d'arbitrage standard*: ces modèles conduisent à l'élaboration d'équations de structure des taux, construites à partir d'une ou plusieurs variables, appelées variables d'état, et d'un raisonnement dit d'arbitrage. Nous

aborderons, dans ce contexte, le modèle de Vasicek (1977) à une variable, et le modèle de Brennan et Schwartz (1979) à deux variables;
b) *les modèles d'équilibre intertemporel*: plus ambitieux que les modèles d'arbitrage, les modèles d'équilibre tentent à partir d'une description d'ensemble de l'économie, sous-jacente et de considérations sur les préférences des investisseurs, d'obtenir également des équations de structure des taux. Le modèle le plus célèbre en la matière est le modèle de Cox, Ingersoll et Ross (1985) dont nous nous contenterons de présenter les résultats;
c) *les modèles de déformation*: plutôt que de se baser sur des variables censées dicter l'évolution des taux, les modèles de déformation partent de la structure initiale des taux telle qu'elle peut être observée, et lui font ensuite subir des déformations consistantes. Le modèle de base, construit selon un schéma binomial, est le modèle de Ho et Lee (1986); ce modèle a été généralisé par Heath, Jarrow et Morton (1987, 1990).

5.1 Modèle d'arbitrage à une variable d'état

On s'intéresse, sur un marché parfait au sens du paragraphe 5.1 du chapitre premier, à l'évaluation d'obligations zéro-coupon sans risque; ces dernières sont supposées exister pour toutes les échéances.

Le modèle est continu dans le temps, sur un intervalle de temps noté $[0, T]$; l'espace de probabilité sous-jacent sera noté Ω.

DÉFINITIONS 2.1

Nous définissons les processus stochastiques suivants:
a) $\{P(t,s,\omega); t \in [0,s], s \text{ fixé} \in [0,T], \omega \in \Omega\}$ représentant le *prix* au temps t d'une obligation zéro-coupon échéant à l'instant s;
b) $\{R(t,s,\omega); t \in [0,s], s \text{ fixé} \in [0,T], \omega \in \Omega\}$ représentant le *processus rendement* au temps t d'une obligation zéro-coupon échéant à l'instant s. Pour t fixé, le processus R modélise la courbe des taux zéro-coupon. Ces deux processus sont liés par la relation

$$P(t,s,\omega) = e^{-(s-t)R(t,s,\omega)};$$

c) le taux instantané, ou *taux SPOT*, sera défini par

$$r(t,\omega) = \lim_{\theta \searrow 0} R(t, t+\theta, \omega) .$$

Ce processus jouera dans le modèle le rôle de variable d'état explicative, à partir de laquelle l'ensemble de la structure des taux (c'est-à-dire le processus R) sera construit. Il s'agit d'un taux à court terme.

HYPOTHÈSES

a) Le processus taux SPOT, en tant que variable explicative, doit être explicité; on suppose que celui-ci est solution d'une équation différentielle stochastique:

$$dr(t) = f(t, r(t))dt + \rho(t, r(t))dw(t), \tag{5.1}$$

où $\{w(t,\omega); t \in [0,T], \omega \in \Omega\}$ est un mouvement brownien standard (voir définition 1.3).

b) Le processus prix P est supposé déterminé par l'évolution du taux SPOT r; nous pouvons exprimer cette hypothèse par la relation

$$\begin{aligned} P(t,s,\omega) &= P(t,s,r(t,\omega)) \\ &= P(t,s,r) \text{ par abus de notation.} \end{aligned} \tag{5.2}$$

Cette relation (5.2) met en lumière la double nature du processus prix, qui sera techniquement exploitée dans la suite (en supposant l'échéance s fixée):

- au travers de sa dépendance au processus taux SPOT, P est un processus stochastique;
- P peut également être considéré comme une fonction réelle des deux variables t et r.

Grâce aux hypothèses ainsi formulées, on peut obtenir une équation dite de structure du processus prix. Des relations (5.1) et (5.2), et par la formule de Ito, on obtient l'équation différentielle stochastique

$$dP(t,s,r) = P(t,s,r) \cdot \mu(t,s,r) \cdot dt - P(t,s,r) \cdot \sigma(t,s,r)dw(t),$$

où

$$\begin{aligned} \mu(t,s,r) &= \frac{1}{P(t,s,r)}\left[\frac{\partial}{\partial t} + f(t,r)\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{2}\rho^2(t,r)\frac{\partial^2}{\partial r^2}\right]P(t,s,r) \\ \sigma(t,s,r) &= -\frac{1}{P(t,s,r)}\rho(t,r) \cdot \frac{\partial}{\partial r} \cdot P(t,s,r). \end{aligned} \tag{5.3}$$

On utilise alors un *raisonnement dit d'arbitrage*: on s'intéresse à un investisseur qui, simultanément, émet x_1 obligations échéant à l'instant s_1 et achète x_2 obligations échéant à l'instant s_2.

Le processus décrivant l'évolution dans le temps de la valeur du portefeuille correspondant sera noté $\{W(t); 0 \leq t \leq \min(s_1, s_2)\}$ et est donné par

$$W(t) = -x_1 \cdot P(t,s_1,r) + x_2 \cdot P(t,s_2,r). \tag{5.4}$$

Compte tenu de (5.3), ce processus admet comme différentielle stochastique

$$\begin{aligned} dW(t) = &[x_2 \cdot P(t,s_2,r) \cdot \mu(t,s_2,r) - x_1 \cdot P(t,s_1,r) \cdot \mu(t,s_1,r)]\,dt \\ &- [x_2 \cdot P(t,s_2,r) \cdot \sigma(t,s_2,r) - x_1 P(t,s_1,r) \cdot \sigma(t,s_1,r)]\,dw(t) \end{aligned}$$

Choisissons x_1 et x_2, de telle manière que le taux de rendement instantané de ce portefeuille ne contienne plus de terme de volatilité:

$$x_2 \cdot P(t,s_2,r) \cdot \sigma(t,s_2,r) - x_1 \cdot P(t,s_1,r) \cdot \sigma(t,s_1,r) = 0$$

On se trouve alors en présence d'un portefeuille sans risque, dont le taux de rendement doit correspondre au taux SPOT r:

$$x_2 \cdot P(t,s_2,r) \cdot \mu(t,s_2,r) - x_1 \cdot P(t,s_1,r)\mu(t,s_1,r) = r \cdot W(t)$$

Ces deux relations forment donc un système homogène compte tenu de la définition (5.4) de W:

$$\begin{cases} x_2 \cdot P(t,s_2,r) \cdot (\mu(t,s_2,r) - r) - x_1 \cdot P(t,s_1,r) \cdot (\mu(t,s_1,r) - r) = 0 \\ x_2 \cdot P(t,s_2,r) \cdot \sigma(t,s_2,r) - x_1 \cdot P(t,s_1,r) \cdot \sigma(t,s_1,r) = 0 \end{cases} \tag{5.5}$$

Les solutions de ce système sont non triviales à la condition que son déterminant soit nul, c'est-à-dire:

$$\frac{\mu(t,s_1,r) - r}{\sigma(t,s_1,r)} = \frac{\mu(t,s_2,r) - r}{\sigma(t,s_2,r)} .$$

Cette relation étant vérifiée pour toute valeur de s_1 et s_2, il en résulte que ce quotient est indépendant de la maturité s de l'obligation zéro-coupon.

On peut donc poser

$$\lambda(t,r) = \frac{\mu(t,s,r) - r}{\sigma(t,s,r)}. \tag{5.6}$$

Cette variable est appelée *prix du risque du marché*; elle représente l'accroissement de rendement moyen de l'obligation zéro-coupon par rapport au taux instantané, par unité de risque; la relation (5.6) exprime que cette variable est indépendante de la maturité de l'obligation.

En substituant dans la relation (5.6), les expressions de μ et σ données par (5.3), il vient en supposant toujours s fixé et en notant de manière simplifiée $P(t,s,r)$ par $P(t,s)$:

$$\frac{1}{P(t,r)}\frac{\partial P}{\partial t}(t,r) + \frac{1}{P(t,r)} \cdot f(t,r)\frac{\partial P}{\partial r}(t,r) + \frac{1}{P(t,r)}\frac{1}{2}\rho^2(t,r)\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}(t,r) - r$$

$$= -\frac{1}{P(t,r)} \cdot \rho(t,r)\frac{\partial P}{\partial r}(t,r)\lambda(t,r),$$

soit finalement l'équation aux dérivées partielles du second ordre

$$\frac{\partial P}{\partial t} + (f + \rho \cdot \lambda) \cdot \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2}\rho^2 \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - rP = 0, \tag{5.7}$$

où (i) P, f, ρ et λ sont des fonctions de t et r;

(ii) P est soumis à la condition au bord: $P(s,r) = 1$ (prix d'une obligation zéro-coupon arrivée à sa maturité).

On peut obtenir une forme de la solution de l'équation (5.7) sous forme conditionnelle:

PROPOSITION 2.1

La solution de l'équation (5.7) peut s'écrire

$$P(t,s,r) = \mathbf{E}_{\mathcal{F}_t} \cdot \exp\left(-\int_t^s r(\tau)d\tau - \frac{1}{2}\int_t^s \lambda^2(\tau, r(\tau))d\tau + \int_t^s \lambda(\tau, r(\tau))dw(\tau)\right), \tag{5.8}$$

où $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}(\{w(u)\}; 0 \leq u \leq t)$ est la σ-algèbre correspondant au passé des processus à l'instant t.

Démonstration

Posons

$$W(u) = \exp\left(-\int_t^u r(\tau)d\tau - \frac{1}{2}\int_t^u \lambda^2(\tau, r(\tau))d\tau + \int_t^u \lambda(\tau, r(\tau))dw(\tau)\right),$$

et calculons la différentielle stochastique du produit de ce processus et du processus prix $P(u,s,r)$.

On sait que

$$dP(u,s,r) = \left(\frac{\partial}{\partial u} + f\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{2}\rho^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)P(u,s,r)du + \rho\frac{\partial}{\partial r}P(u,s,r)dw(u).$$

D'autre part

$$dW(u) = d[\exp(Z(u))],$$

où

$$dZ(u) = \left(-r(u) - \frac{1}{2}\lambda^2(u, r(u))\right)du + \lambda(u, r(u))dw(u).$$

Par la formule d'Ito, on a alors

$$\begin{aligned} dW(u) &= \left[\frac{\partial e^Z}{\partial u} + \frac{\partial e^Z}{\partial Z}\left(-r(u) - \frac{1}{2}\lambda^2(u, r(u)) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 e^Z}{\partial Z^2}\cdot\lambda^2(u, r(u))\right]du \\ &\quad + \frac{\partial e^Z}{\partial Z}\cdot\lambda(u, r(u))dw(u), \end{aligned}$$

ou

$$dW(u) = [-r(u)W(u)]du + \lambda(u, r(u))W(u)dw(u).$$

Finalement, il vient

$$d(P(u,s,r)W(u)) = W(u)dP(u,s,r)+P(u,s,r)dW(u)+\rho W(u)\lambda\cdot\frac{\partial P}{\partial r}(u,s,r)du$$

$$= W(u)\cdot\left[\frac{\partial P}{\partial u}+f\frac{\partial P}{\partial r}+\frac{1}{2}\rho^2\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}-rP+\rho\lambda\frac{\partial P}{\partial r}\right]du$$

$$+\left[P(u,s,r)\cdot W(u)\cdot\lambda+\rho\cdot W(u)\cdot\frac{\partial P}{\partial r}\right]dw(u).$$

Le premier terme, dépendant de la différentielle "du" est nul compte tenu de l'équation de structure (5.7); en intégrant alors cette égalité entre t et s, il vient

$$P(s,s,r)W(s)-P(t,s,r)W(t)=\int_t^s(P(u,s,r)W(u)\lambda+\rho\cdot W(u)\frac{\partial P}{\partial r})dw(u).$$

En prenant l'espérance conditionnelle par rapport à $\mathcal{F}_t$, et tenant compte des propriétés des intégrales stochastiques, on a

$$E_{\mathcal{F}_t}[P(s,s,r)W(s)-P(t,s,r)\cdot W(t)]=0.$$

D'autre part, par leur définition, $P(s,s,r)=W(t)=1$:

$$E_{\mathcal{F}_t}[W(s)-P(t,s,r)]=0$$

Comme $P(t,s,r)$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable, on obtient finalement

$$P(t,s,r)=E_{\mathcal{F}_t}W(s)\ .$$

■

REMARQUES

1) La relation (5.8) permet théoriquement d'obtenir le processus prix d'obligations zéro-coupon (et donc la courbe correspondante des taux zéro-coupon) moyennant fixation des fonctions réelles suivantes:

$f(t,r)$: rendement moyen du taux SPOT,
$\rho(t,r)$: volatilité du taux SPOT,
$\lambda(t,r)$: prix du risque du marché.

Il convient donc d'estimer ces fonctions avant de pouvoir exploiter ce modèle.

2) Lorsque le prix du risque sur le marché est nul ($\lambda\equiv 0$), c'est-à-dire financièrement en l'absence de préférence pour la liquidité, le prix de l'obligation (5.8) peut se mettre sous la forme simplifiée

$$P(t,s,r)=E_{\mathcal{F}_t}\exp-\int_t^s r(\tau)d\tau.$$

Le cas limite déterministe, où le processus de taux SPOT n'est plus aléatoire, conduit à la formule d'actualisation bien connue à taux d'intérêt variable

$$P(t,s,r) = \exp - \int_t^s r(\tau)d\tau.$$

3) En vue d'obtenir une forme de la solution plus explicite, que la formule (5.8), on peut spécifier différentes formes possibles pour les fonctions f, ρ et λ.

Vasicek (1977) a proposé la structure suivante:

a) le taux SPOT est solution de l'équation

$$dr(t) = \alpha \cdot (\gamma - r(t))dt + \rho \cdot dw(t), \tag{5.9}$$

où α, γ et ρ sont des constantes; dans ce cadre, γ représente une valeur d'équilibre du taux, vers lequel les trajectoires vont tendre à l'aide d'une force de rappel dictée par le paramètre α, tout en fluctuant par la perturbation brownienne;

b) le prix du risque sur le marché est une constante strictement positive:

$$\lambda(t,r) = \lambda > 0.$$

L'équation (5.7) du prix d'une obligation zéro-coupon devient alors

$$\frac{\partial P}{\partial t} + (\alpha(\gamma - r) + \rho\lambda)\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2}\rho^2\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - rP = 0. \tag{5.10}$$

On peut vérifier directement que la solution dans ce cas peut se mettre sous la forme

$$P(t,s,r) = \exp\left[\frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha(s-t)}) \cdot (K - r) - (s-t) \cdot K - \frac{\rho^2}{4\alpha^3}(1 - e^{-\alpha(s-t)})^2\right],$$

où

$$K = \gamma + \frac{\rho\lambda}{\alpha} - \frac{\rho^2}{2\alpha^2}.$$

Rappelons que dans cette relation, r représente le taux SPOT, tel qu'il est observé à l'instant t de tarification (c'est-à-dire $r = r(t)$, voir (5.2)). Dans ce modèle particulier, le taux de rendement moyen instantané de l'obligation zéro-coupon défini en (5.3), peut s'écrire

$$\begin{aligned} \mu(t,s,r) &= \frac{1}{P(t,s,r)}\left[\frac{\partial}{\partial t} + f(t,r)\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{2}\rho^2(t,r)\frac{\partial^2}{\partial r^2}\right]P(t,s,r) \\ &= \frac{1}{P(t,s,r)} \cdot \left[r \cdot P(t,s,r) - \lambda\rho\frac{\partial P}{\partial r}\right] \\ &= r(t) + \frac{\rho\lambda}{\alpha}(1 - e^{-\alpha(s-t)}). \end{aligned} \tag{5.11}$$

La *prime de risque* sur le taux de l'obligation zéro-coupon, par rapport au taux instantané (taux à court terme), c'est-à-dire l'accroissement de rendement moyen sur un titre à échéance lointaine par rapport à un titre "instantané", est donc donnée explicitement dans ce modèle par une fonction exponentielle négative.

5.2 Modèle d'arbitrage à deux variables d'état

Ne considérant comme seule variable explicative sur l'ensemble de la courbe des taux que le taux SPOT, le modèle à une variable d'état développé ci-dessus est sans conteste réducteur.

En vue d'enrichir la modélisation, certains auteurs ont suggéré, tout en conservant la méthodologie du modèle d'arbitrage de Vasicek, d'introduire plus de variables sous-jacentes. Nous développons, dans ce contexte, le modèle à deux variables d'état introduit par Brennan et Schwartz (1979).

L'idée de base de ce modèle est de faire dépendre l'évolution de la structure de la courbe des taux, non seulement du taux SPOT, mais aussi du taux d'intérêt à long terme; ce dernier étant censé contenir des informations sur les valeurs futures du taux SPOT.

Ce *taux long terme* est défini par l'expression

$$\ell(t,\omega) = \lim_{\theta \to \infty} R(t,\theta,\omega), \tag{5.12}$$

où le processus rendement R est donné par la définition 2.1.

Les processus taux SPOT et taux long terme sont alors supposés satisfaire au système d'équations différentielles stochastiques

$$\begin{cases} dr(t) &= f_1(t,r(t),\ell(t))dt + \rho_1(t,r(t),\ell(t))dw_1(t) \\ d\ell(t) &= f_2(t,r(t),\ell(t))dt + \rho_2(t,r(t),\ell(t))dw_2(t), \end{cases} \tag{5.13}$$

où $\{w_1(t,\omega), t \in [0,T], \omega \in \Omega\}$ et $\{w_2(t,\omega), t \in [0,T], \omega \in \Omega\}$ sont deux mouvements browniens standards corrélés tels que

$$\mathbf{E}(w_1(t) \cdot w_2(t)) = \eta \cdot t \qquad \forall t \in [0,T].$$

Le processus prix P est supposé déterminé par l'évolution conjointe du taux SPOT et du taux long-terme, l'expression (5.2) devenant

$$P(t,s,\omega) = P(t,s,r(t,\omega),\ell(t,\omega)). \tag{5.14}$$

Ce processus est alors considéré comme fonction réelle des trois variables t, r et ℓ, pour une maturité fixée s. On peut développer la même approche d'arbitrage que dans le modèle à une variable d'état.

Résumons les grandes étapes du raisonnement.

a) Compte tenu des équations différentielles stochastiques (5.13) et de la dépendance (5.14) du processus prix, ce dernier est également solution d'une équation différentielle stochastique, par application de la formule d'Ito:

$$dP(t,s,r,\ell) = P \cdot \mu(t,s,r,\ell)dt - P \cdot \sigma_1(t,s,r,\ell)dw_1(t) - P\sigma_2(t,s,r,\ell)dw_2(t),$$

où

$$\begin{aligned}
\mu(t,s,r,\ell) &= \frac{1}{P}\left[\frac{\partial}{\partial t} + f_1 \cdot \frac{\partial}{\partial r} + f_2 \frac{\partial}{\partial \ell} + \frac{1}{2}\rho_1^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2}\right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2}\rho_2^2 \frac{\partial^2}{\partial \ell^2} + \eta\rho_1\rho_2 \frac{\partial^2}{\partial r \partial \ell}\right] \cdot P \\
\sigma_1(t,s,r,\ell) &= -\frac{1}{P} \cdot \rho_1 \cdot \frac{\partial P}{\partial r} \\
\sigma_2(t,s,r,\ell) &= -\frac{1}{P} \cdot \rho_2 \cdot \frac{\partial P}{\partial \ell}.
\end{aligned}$$

b) On applique alors un raisonnement d'arbitrage: on construit un portefeuille composé d'obligations zéro-coupon de trois échéances différentes, sans risque. L'hypothèse d'absence d'opportunités d'arbitrage conduit à la relation suivante, qui généralise à deux dimensions la relation (5.6),

$$\mu(t,s,r,\ell) - r = \lambda_1(t,r,\ell) \cdot \sigma_1(t,s,r,\ell) + \lambda_2(t,r,\ell) \cdot \sigma_2(t,s,r,\ell),$$

où les fonctions λ_1 et λ_2 sont toutes deux indépendantes de l'échéance s de l'obligation et sont appelées prix du risque sur le marché, respectivement du taux SPOT et du taux long terme.

c) En substituant μ, σ_1 et σ_2 dans cette dernière relation par leur valeur, on obtient une équation aux dérivées partielles du second ordre pour le processus prix P, vu comme fonction des trois variables réelles t, r et ℓ, qui généralise l'équation à une variable d'état (5.7):

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial P}{\partial t} + (f_1 + \rho_1 \cdot \lambda_1)\frac{\partial P}{\partial r} + (f_2 + \rho_2 \cdot \lambda_2)\frac{\partial P}{\partial \ell} + \frac{1}{2}\rho_2^2 \frac{\partial^2 P}{\partial \ell^2} + \frac{1}{2}\rho_1^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} \\
&+\eta\rho_1\rho_2 \frac{\partial^2 P}{\partial r \partial \ell} - rP = 0,
\end{aligned} \tag{5.15}$$

où (i) $f_1, f_2, \rho_1, \rho_2, \lambda_1$ et λ_2 sont des fonctions de t, r, et ℓ qu'il convient de particulariser

(ii) P est soumis à la condition au bord:

$$P(s,r,\ell) = 1.$$

REMARQUES

1) La méthodologie utilisée permet la généralisation à un nombre quelconque de variables explicatives; l'introduction d'un trop grand nombre de variables explicatives conduit néanmoins à de délicats problèmes dans la procédure d'estimation des paramètres du modèle.

2) Dans le cadre du modèle à deux variables développé ci-dessus, la procédure d'estimation des paramètres peut être facilitée, en assimilant la seconde variable explicative, à savoir le taux long ℓ, au taux d'une obligation de durée

infinie (obligation disponible sur certains marchés sous la dénomination "*consol bond*" et dont le prix peut donc être observé). Diverses particularisations des équations (5.13) régissant le taux court et le taux long ont été proposées dans ce contexte (Brennan et Schwartz, 1979 et 1982).

5.3 Modèle d'équilibre intertemporel

S'il conduit techniquement aux mêmes procédures de résolution que les modèles d'arbitrage étudiés ci-dessus, le modèle d'équilibre intertemporel, développé par Cox, Ingersoll et Ross (1985), se veut plus ambitieux dans l'analyse explicative macro-économique. Au départ d'une économie continue, compétitive dans laquelle il existe un unique bien de consommation, les individus sont censés maximiser une fonction objectif représentant l'espérance mathématique de l'utilité de leur consommation.

L'individu choisit la quantité optimale du bien; le reste est placé ou emprunté au taux SPOT. Diverses considérations d'équilibre conduisent alors à la forme suivante d'équation pour ce taux SPOT qui est un cas particulier de l'équation (5.1):

$$dr(t) = \alpha \cdot (\gamma - r(t))dt + \rho \cdot \sqrt{r(t)}dw(t), \tag{5.16}$$

où α, γ et ρ sont des constantes.

Cette équation rappelle le cas particulier (5.9) étudié précédemment, mais s'en distingue fondamentalement par l'apparition d'un terme non linéaire en racine carrée, au niveau de la diffusion. Le modèle spécifie d'autre part une forme non linéaire particulière pour le prix du risque sur le marché, défini en (5.6):

$$\lambda(t,r) = -\frac{\pi}{\rho}\sqrt{r}, \tag{5.17}$$

où π est une constante négative, et ρ est la constante apparaissant dans l'équation du taux SPOT (5.16).

Contrairement au modèle particulier étudié en (5.9), ce modèle suppose donc que la prime du risque sur le marché est une fonction croissante du taux court terme.

Compte tenu des formes particulières (5.16) et (5.17), l'équation de structure du processus prix P, (5.7) devient

$$\frac{\partial P}{\partial t} + (\alpha(\gamma - r) - \pi \cdot r)\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2}\rho^2 \cdot r\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - rP = 0, \tag{5.18}$$

où α, γ, ρ et π sont des constantes.

La solution de cette équation est donnée par (voir Cox, Ingersoll, Ross, 1985)

$$P(t,s,r) = A(t,s) \cdot e^{-B(t,s)\cdot r}, \tag{5.19}$$

où

$$A(t,s) = \left(\frac{2g \cdot \exp((\alpha+\pi+g)(s-t)/2)}{(\alpha+\pi+g)(\exp(g(s-t))-1)+2g} \right)^{2\alpha\gamma/\rho^2}$$

$$B(t,s) = \frac{2 \cdot (\exp(g(s-t))-1)}{(\alpha+\pi+g)(\exp(g(s-t))-1)+2g}$$

avec

$$g^2 = ((\alpha+\pi)^2 + 2\rho^2) \, .$$

Dans ce modèle, le taux de rendement moyen instantané de l'obligation zéro-coupon (voir (5.3)) devient

$$\begin{aligned} \mu(t,s,r) &= \frac{1}{P(t,s,r)} \left[\frac{\partial}{\partial t} + f(t,r)\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{2}\rho^2(t,r)\frac{\partial^2}{\partial r^2} \right] P(t,s,r) \\ &= \frac{1}{P(t,s,r)} \left[r \cdot P(t,s,r) - \lambda(t,r) \cdot \rho(t,r)\frac{\partial P}{\partial r} \right] \\ &= r + \frac{\pi r}{P} \cdot \frac{\partial P}{\partial r} = r + \frac{\pi r}{P} \cdot (-B(t,s) \cdot P) \\ &= r(t) - \pi \cdot r(t) \cdot B(t,s). \end{aligned} \tag{5.20}$$

La prime de risque de l'obligation zéro-coupon par rapport au taux SPOT, (positive, compte tenu du signe négatif de π), est donc dans ce modèle une fonction linéaire du taux SPOT, contrairement au modèle de Vasicek où elle en était indépendante (voir (5.11)).

5.4 Modèle de déformation binomial de Ho et Lee

Moins ambitieux que les modèles vus ci-dessus, car ne recherchant ni les variables sous-jacentes au marché ni les mécanismes régissant celles-ci, le modèle binomial de Ho et Lee (1986) se contente de considérer de manière exogène la structure initiale de la courbe des taux zéro-coupon et de lui appliquer ensuite une succession de déformations selon un schéma binomial.

Le modèle s'appuie sur une économie discrète, l'espace des temps étant noté $T = \{0,1,2,3,\ldots\}$.

A l'instant initial ($n = 0$), on suppose connu le prix des obligations zéro-coupon, pour les différentes maturités de l'ensemble T:

$$P(0,s) = \frac{1}{(1+R(0,s))^s} = \frac{1}{(1+r(0,1)(1+r(0,2))\ldots(1+r(0,s))}$$

où $P(0,s)$ = prix d'une obligation zéro-coupon en $t = 0$, de durée s;

$R(0,s)$ = taux au comptant de cette obligation;

$r(0,n)$ = taux à terme de cette obligation pour la période entre $n-1$ et n.

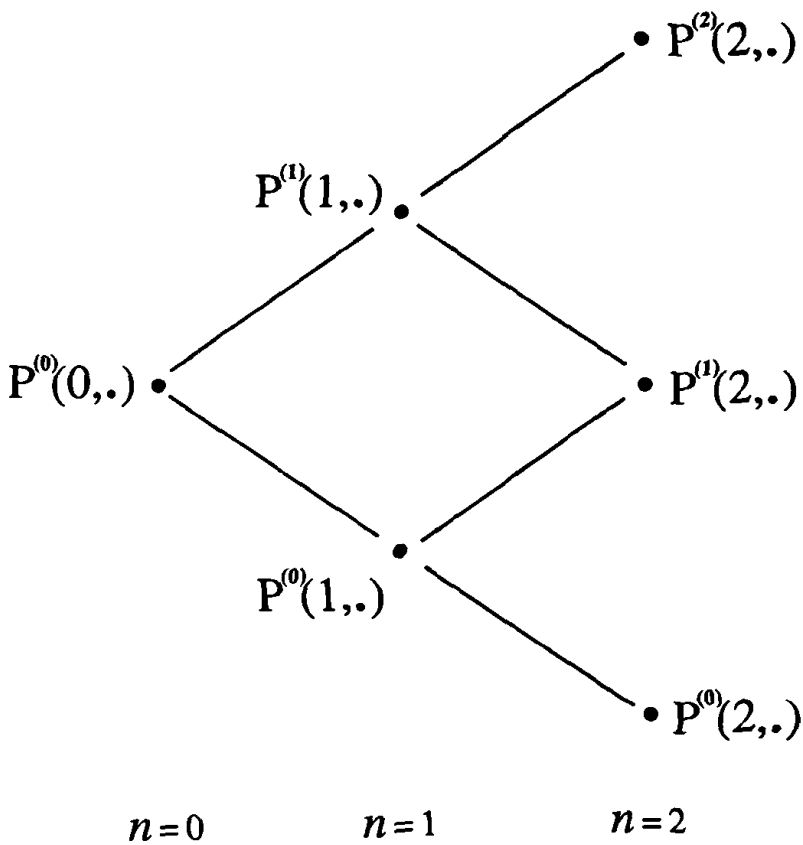
Nous noterons par convention: $P(0,s) = P^{(0)}(0,s)$ pour indiquer qu'initialement la structure se trouve dans un unique état connu, indicé supérieurement par 0.

L'évolution ultérieure du système aux instants $n = 1, 2, 3, \ldots$ est supposée alors se faire suivant un treillis binomial: à chaque instant, on peut assister à deux scénarios:

- soit à une baisse des taux (donc une hausse des prix);
- soit à une hausse des taux (donc une baisse des prix).

On suppose de plus, qu'une baisse suivie d'une hausse conduit à la même structure qu'une hausse suivie d'une baisse.

En notant $P^{(i)}(n, \cdot)$ la gamme des prix à l'instant n, lorsque le système est *dans l'état i, on peut représenter l'évolution du processus:*



Chaque point de ce réseau est une gamme de prix d'obligations zéro-coupon:

$$P^{(i)}(n,\cdot) = \{P^{(i)}(n,s); s \in T\}.$$

A cette suite de prix, correspond de manière bi-univoque une gamme de taux au comptant par le biais de la relation

$$P^{(i)}(n,s) = \frac{1}{(1+R^{(i)}(n,s))^s}. \tag{5.21}$$

L'interprétation financière étant:

$P^{(i)}(n,s)$ = prix à l'instant n d'une obligation zéro-coupon de durée s (donc échéant à l'instant $n+s$), lorsque le système est dans l'état i;

$R^{(i)}(n,s)$ = taux au comptant à l'instant n d'une obligation zéro-coupon de durée s lorsque le système est dans l'état i.

Le processus prix P est soumis aux conditions au bord:

(a) $P^{(i)}(n,0) = 1$ quels que soient i et n

(b) $\lim_{t\to\infty} P^{(i)}(n,t) = 0$ quels que soient i et n.

Ce processus prix permet de suivre l'évolution du prix d'un titre en particulier.

A titre d'exemple, considérons à l'instant initial $n = 0$, une obligation zéro-coupon de durée 3; son prix initial, connu, est à lire dans la gamme initiale des prix, soit $P(0,3)$.

En $n = 1$, son prix vaudra $P^{(0)}(1,2)$ ou $P^{(1)}(1,2)$. En $n = 2$, son prix vaudra $P^{(0)}(2,1)$, $P^{(1)}(2,1)$ ou $P^{(2)}(2,1)$. En $n = 3$, le titre est à maturité:

$$P^{(0)}(3,0) = P^{(1)}(3,0) = P^{(2)}(3,0) = P^{(3)}(3,0) = 1.$$

Le modèle peut également être interprété sous l'angle du déplacement de la courbe des taux au comptant.

Le modèle étant posé, on peut en paramétrer l'évolution compte tenu de diverses conditions et relations d'équilibre, que nous imposerons.

Si le modèle était déterministe, on aurait, dans un contexte d'anticipation parfaite (voir (4.7)),

$$P(n,\tau+1) = P(n+1,\tau)\cdot P(n,1),$$

c'est-à-dire

$$P(n+1,\tau) = \frac{P(n,\tau+1)}{P(n,1)}. \tag{5.22}$$

Dans un tel modèle déterministe, l'ensemble du processus peut être généré à partir de la structure initiale $P(0,\cdot)$ et de la relation récursive (5.22).

Dans le modèle aléatoire considéré ici, l'évolution (5.22) est perturbée du fait de la hausse ou de la baisse des taux; partant de l'état i à l'instant n, on a:

(i) en cas de baisse des taux (hausse des prix):

$$P^{(i+1)}(n+1,\tau) = \frac{P^{(i)}(n,\tau+1)}{P^{(i)}(n,1)} \cdot h(\tau), \tag{5.23}$$

où $h(\tau) > 1 (\tau \geq 1)$ et $h(0) = 1$

(ii) en cas de hausse des taux (baisse des prix):

$$P^{(i)}(n+1,\tau) = \frac{P^{(i)}(n,\tau+1)}{P^{(i)}(n,1)} \cdot h^*(\tau), \tag{5.24}$$

où $h^*(\tau) < 1 (\tau \geq 1)$ et $h^*(0) = 1$.

Les relations (5.23) et (5.24) introduisent une première contrainte: les fonctions de perturbation h et h^* ne dépendent que de la durée et sont indépendantes de l'instant et de l'état.

Deux nouvelles contraintes sont imposées au modèle dans le but:

a) d'éviter les opportunités d'arbitrage (*condition d'arbitrage*);

b) de réaliser la condition d'équivalence entre une baisse de taux suivie d'une hausse de taux, et une hausse suivie d'une baisse (***condition de neutralité***).

a) *Condition d'arbitrage*

Cette condition va nous permettre d'obtenir une relation liant les deux fonctions de perturbation h et h^*.

PROPOSITION 2.2

Il existe une constante p $(0 < p < 1)$, appelée probabilité binomiale implicite, telle que:

$$p \cdot h(\tau) + (1-p) \cdot h^*(\tau) = 1 \qquad (\tau = 0, 1, 2, \ldots). \tag{5.25}$$

Démonstration

Constituons un portefeuille constitué d'une obligation zéro-coupon de maturité τ et de H obligations zéro-coupon de maturité τ' $(\tau' \neq \tau)$ (τ et τ' étant quelconques mais fixés). La valeur de ce portefeuille à l'instant n, sous l'état i, est

$$W^{(i)}(n) = P^i(n,\tau) + H \cdot P^i(n,\tau').$$

A l'instant $n+1$, le portefeuille peut prendre deux valeurs:

$$\begin{aligned} W^{(i)}(n+1) &= P^i(n+1,\tau-1) + H \cdot P^i(n+1,\tau'-1) \\ &= \frac{1}{P^i(n,1)} \left(P^i(n,\tau) h^*(\tau-1) + H \cdot P^i(n,\tau') h^*(\tau'-1) \right), \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} W^{(i+1)}(n+1) &= P^{i+1}(n+1,\tau-1) + H \cdot P^{i+1}(n+1,\tau'-1) \\ &= \frac{1}{P^i(n,1)} \left(P^i(n,\tau) h(\tau-1) + H \cdot P^i(n,\tau') h(\tau'-1) \right), \end{aligned}$$

et ce, compte tenu des relations (5.23) et (5.24).

Choisissons alors la constante H, de telle façon que

$$W^{(i)}(n+1) = W^{(i+1)}(n+1).$$

Ce portefeuille est alors équivalent à un placement sans risque sur une période unitaire; par un raisonnement d'arbitrage, le rendement de ce portefeuille doit être égal à celui de l'obligation zéro-coupon de durée unitaire, dont le prix est $P^i(n,1)$. On obtient ainsi successivement les deux conditions:

a) $P^i(n,\tau) \cdot h^*(\tau-1) + H \cdot P^i(n,\tau') \cdot h^*(\tau'-1) = P^i(n,\tau)h(\tau-1) + H \cdot P^i(n,\tau')h(\tau'-1)$

b) $W^i(n) = P^i(n,1) \cdot W^i(n+1)$

ou $P^i(n,\tau) + H \cdot P^i(n,\tau') = P^i(n,\tau) \cdot h^*(\tau-1) + H \cdot P^i(n,\tau')h^*(\tau'-1)$

En extrayant des égalités a) et b) la valeur commune de H, on a

$$\frac{P^i(n,\tau)(h^*(\tau-1) - h(\tau-1))}{P^i(n,\tau')(h(\tau'-1) - h^*(\tau'-1))} = \frac{P^i(n,\tau)(h^*(\tau-1)-1)}{P^i(n,\tau')(1-h^*(\tau'-1))},$$

ou

$$\frac{1-h^*(\tau'-1)}{h(\tau'-1)-h^*(\tau'-1)} = \frac{1-h^*(\tau-1)}{h(\tau-1)-h^*(\tau-1)}.$$

Les instants τ et τ' étant quelconques, la grandeur

$$p = \frac{1-h^*(\tau)}{h(\tau)-h^*(\tau)}$$

est donc indépendante de τ, avec $0 < p < 1$. Cette dernière relation est équivalente à

$$p \cdot h(\tau) + (1-p)h^*(\tau) = 1.$$

■

COROLLAIRE

Compte tenu des relations (5.23) et (5.24), la relation (5.25) peut s'écrire

$$p \cdot P^{i+1}(n+1,\tau) \cdot \frac{P^i(n,1)}{P^i(n,\tau+1)} + (1-p) \cdot P^i(n+1,\tau) \cdot \frac{P^i(n,1)}{P^i(n,\tau+1)} = 1,$$

c'est-à-dire

$$P^i(n,\tau+1) = P^i(n,1) \cdot \left[p \cdot P^{i+1}(n+1,\tau) + (1-p) \cdot P^i(n+1,\tau)\right]. \quad (5.26)$$

Interprétation

Le prix à l'instant n d'une obligation zéro-coupon de durée $\tau+1$, apparaît comme l'espérance mathématique actualisée, sous la distribution implicite de

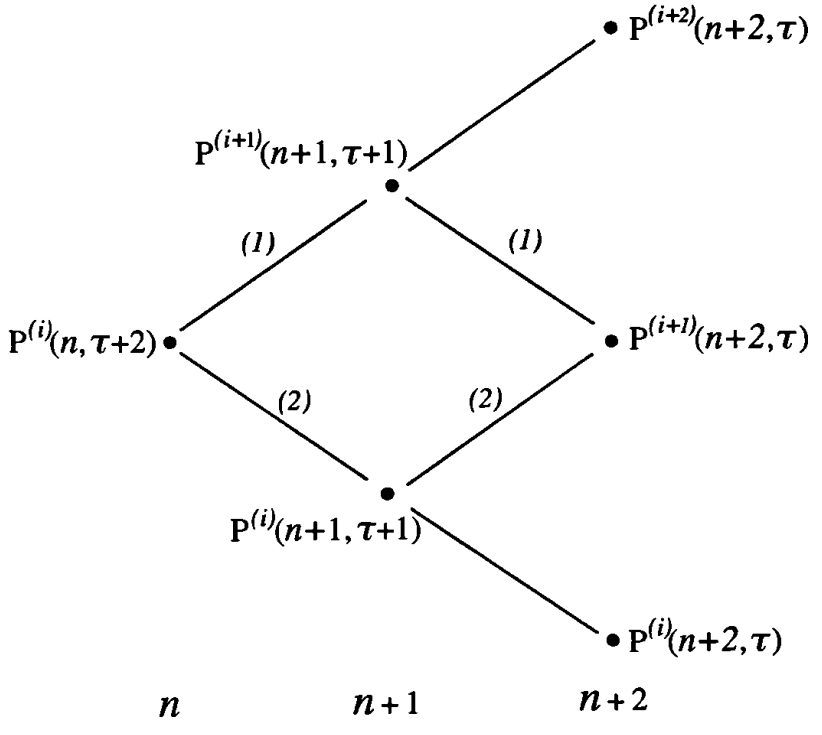
paramètre p, du prix à l'instant $n+1$ d'une obligation échéant à la même date (soit $n+\tau+1$).

Le paramètre p, qui peut ainsi s'interpréter comme une probabilité (n'ayant rien à voir avec la probabilité réelle), est un indicateur de moyenne dépendant de l'amplitude respective des mouvements de hausse et de baisse, il est généralement voisin de 0,5 (il vaut 0,5 lorsque: $h(\tau) - 1 = 1 - h^*(\tau)$).

b) *Condition de neutralité*

Cette condition exprime l'indépendance du chemin parcouru au sein de l'arbre binomial.

Considérons pour ce, l'évolution du prix d'un titre fixé sur deux périodes de temps:



Deux chemins, (1) et (2), permettent donc de passer de la valeur $P^i(n,\tau+2)$ à la valeur $P^{i+1}(n+2,\tau)$.

L'application des relations d'évolution (5.23) et (5.24) donne successivement, pour le chemin 1,

$$P^{i+1}(n+2,\tau) = \frac{P^{i+1}(n+1,\tau+1)}{P^{i+1}(n+1,1)} \cdot h^*(\tau),$$

et

$$P^{i+1}(n+1,\tau+1) = \frac{P^i(n,\tau+2)}{P^i(n,1)} h(\tau+1),$$

donc

$$P^{i+1}(n+2,\tau) = \frac{P^i(n,\tau+2)h(\tau+1)h^*(\tau)}{P^i(n,1)P^{i+1}(n+1,1)}.$$

Or

$$P^{i+1}(n+1,1) = \frac{P^i(n,2)}{P^i(n,1)} h(1).$$

En substituant, il vient

$$P^{i+1}(n+2,\tau) = \frac{P^i(n,\tau+2) \cdot h(\tau+1) \cdot h^*(\tau)}{P^i(n,2) \cdot h(1)}.$$

On obtient de même pour le chemin 2,

$$P^{i+1}(n+2,\tau) = \frac{P^i(n,\tau+2)h^*(\tau+1)h(\tau)}{P^i(n,2) \cdot h^*(1)}.$$

En égalant ces deux expressions, il vient

$$\frac{h(\tau+1) \cdot h^*(\tau)}{h(1)} = \frac{h^*(\tau+1)h(\tau)}{h^*(1)}.$$

On peut dans cette expression éliminer h^* grâce à la relation (5.25) puisque

$$h^*(\tau) = (1 - ph(\tau))/(1-p).$$

En substituant, il vient successivement

$$\frac{h(\tau+1)}{h(1)}(1-ph(\tau))/(1-p) = \frac{(1-ph(\tau+1))h(\tau)/(1-p)}{(1-ph(1))/(1-p)},$$

ou

$$h(\tau+1)(1-ph(\tau))(1-ph(1)) = (1-p)h(1)h(\tau)(1-ph(\tau+1)),$$

ou

$$\frac{(1-ph(\tau))(1-ph(1))}{h(1)h(\tau)(1-p)} = \frac{1-ph(\tau+1)}{h(\tau+1)},$$

ou

$$\frac{1}{h(\tau+1)} = \left(\frac{1}{h(\tau)} - p\right) \cdot \frac{1-ph(1)}{h(1)(1-p)} + p,$$

ou

$$\frac{1}{h(\tau+1)} = \frac{1}{h(\tau)} \cdot \frac{1-ph(1)}{h(1)(1-p)} + \frac{p(h(1)-1)}{h(1)(1-p)}.$$

En posant $\frac{1}{h(\tau)} = \gamma(\tau)$, et compte tenu de la contrainte $h(0) = \gamma(0) = 1$, on obtient ainsi un schéma linéaire aux différences finies du premier ordre:

$$\gamma(\tau+1) = \gamma(\tau) \cdot \delta + (1-\delta) \qquad (\gamma(0) = 1),$$

où

$$\delta = \frac{1-ph(1)}{h(1)-ph(1)} \qquad (0 < \delta < 1).$$

La solution générale d'un tel schéma est donnée par

$$\gamma(\tau+1) = K_1 \cdot \delta^{\tau+1} + K_2 \qquad (K_1, K_2 \text{ étant deux constantes}).$$

On a:

$$\gamma(0) = K_1 + K_2 = 1.$$

En substituant dans l'équation, on a

$$K_1\delta^{\tau+1} + K_2 = (K_1\delta^{\tau} + K_2)\delta + p(1-\delta).$$

Il en résulte:

$$\begin{aligned} K_2 &= p \\ K_1 &= 1-p. \end{aligned}$$

La solution finale est donc

$$h(\tau) = \frac{1}{p + (1-p)\delta^{\tau}} \quad (0 < \delta < 1). \tag{5.27}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} h^*(\tau) &= (1-ph(\tau))/(1-p) \\ &= \left(1 - \frac{p}{p+(1-p)h\delta^{\tau}}\right)/(1-p) \\ &= \frac{\delta^{\tau}}{p+(1-p)\delta^{\tau}} = \delta^{\tau} \cdot h(\tau). \end{aligned} \tag{5.28}$$

En particulier, $\delta = \frac{h^*(1)}{h(1)}$; cette relation permet de donner au paramètre δ le rôle d'un indicateur de dispersion, proche de 1 si la variance des taux est faible.

CONCLUSION

Les deux conditions d'arbitrage et de neutralité ont permis de donner forme aux fonctions de perturbation des prix h et h^*, au travers des relations (5.27) et (5.28); ces relations montrent que le modèle est totalement déterminé:
a) par la structure initiale des prix $P(0,\cdot)$;
b) par les deux constantes p et δ.

Il est également intéressant de traduire l'effet des perturbations engendrées par le modèle sur la courbe des taux.

Intéressons-nous par exemple à l'évolution du taux au comptant à l'instant $n = 1$; selon le scénario de hausse ou de baisse, en utilisant la notation exponentielle (4.8) des taux au comptant, on peut noter

$$(1 + \bar{R}^{(i)}(n,s)) = -\frac{\log P^{(i)}(n,s)}{s}.$$

D'autre part, pour $i = 1$:

$$\begin{aligned} P^1(1,s) &= \frac{P(0,s+1)}{P(0,1)} \cdot h(s) \\ &= \frac{P(0,s+1)}{P(0,1)} \cdot \frac{1}{p + (1-p)\delta^s}, \end{aligned}$$

et pour $i = 0$:

$$\begin{aligned} P^{(0)}(1,s) &= \frac{P(0,s+1)}{P(0,1)} h^*(s) \\ &= \frac{P(0,s+1)}{P(0,1)} \cdot \frac{\delta^s}{p + (1-p)\delta^s}. \end{aligned}$$

Il en résulte pour les taux au comptant:

$$\begin{aligned} R^{(1)}(1,s) &= \frac{1}{s}\left[\log \frac{P(0,1)}{P(0,s+1)} + \log(p + (1-p)\delta^s)\right] - 1 \\ R^{(0)}(1,s) &= \frac{1}{s}\left[\log \frac{P(0,1)}{P(0,s+1)} + \log(p + (1-p)\delta^s)\right] - 1 - \log \delta \\ &= R^{(1)}(1,s) - \log \delta \end{aligned} \tag{5.29}$$

Les deux courbes de taux potentielles sont donc parallèles.

CONCLUSION

Si l'on veut juger des qualités du modèle de Ho et Lee, il y a lieu de noter:
- le respect intégral de la structure initiale des taux; l'ensemble de cette information, disponible à l'instant initial, est prise en compte;

- la simplicité de la mise en oeuvre numérique (estimation de deux paramètres).

En revanche, la parfaite corrélation des taux des différentes échéances, que génère la technique utilisée, peut être considérée comme irréaliste. Le modèle de déformation plus général, présenté au paragraphe suivant, permettra de lever cette hypothèse.

5.5 Modèle de déformation discret de Heath, Jarrow et Morton

Heath, Jarrow et Morton ont développé un modèle assez général de déformation de taux, qui admet tant une version discrète (1990) que continue (1987) et qui de plus permet de retrouver comme cas particulier divers modèles vus précédemment.

Nous nous limiterons ici à la description du modèle discret, nous contentant d'indiquer les voies de la généralisation continue.

Les hypothèses de base du modèle discret seront similaires à celles du modèle de Ho et Lee: l'espace des temps étant noté $T = \{0, 1, 2, \ldots\}$, on suppose que l'on dispose d'obligations zéro-coupon pour les différentes maturités de l'ensemble T, dont les prix à l'instant initial sont connus.

On notera

$P(0, s)$ = prix d'une obligation zéro-coupon en $t = 0$, de durée s.

Les taux au comptant et à terme d'une telle obligation seront notés $R(0, s)$ et $r(0, n)$ (taux à terme entre $n-1$ et n) mais nous utiliserons pour ces taux la notation exponentielle (4.8). Aux instants ultérieurs, on suppose que cette structure de taux subit des déformations aléatoires. On notera

$r(n, s)$ = taux à terme valable à l'instant n, pour la période $(n+s-1, n+s)$.

Ces taux sont supposés être des variables aléatoires, obtenues à partir de la structure initiale connue, par la relation

$$\begin{aligned} r(n,s) &= r(0,n+s) + \sum_{j=1}^{n} a_j \left[u_1(j,n+s) - v_1(j,n+s)\right] + \sum_{j=1}^{n} v_1(j,n+s) \\ &+ \sum_{j=1}^{n} b_j \cdot \left[u_2(j,n+s) - v_2(j,n+s)\right] + \sum_{j=1}^{n} v_2(j,n+s), \end{aligned} \tag{5.30}$$

où: - a_j, b_j $(j = 1, \ldots, n)$ sont des variables aléatoires binaires prenant leurs valeurs dans $\{0, 1\}$ et dont les probabilités jointes sont données par:

$q_{00}(j)$ si $a_j = 0$ et $b_j = 0$

$q_{01}(j)$ si $a_j = 0$ et $b_j = 1$

$q_{10}(j)$ si $a_j = 1$ et $b_j = 0$

$q_{11}(j)$ si $a_j = 1$ et $b_j = 1$

avec $q_{00}(j) + q_{01}(j) + q_{10}(j) + q_{11}(j) = 1$.

- u_1, u_2, v_1, v_2 sont des fonctions aléatoires à valeurs réelles, positives pour u_1, u_2, négatives pour v_1, v_2.

Interprétation financière

La structure initiale des taux à terme est soumise à l'effet de deux chocs aléatoires, à chaque instant j, représentés par les variables aléatoires a_j et b_j. Les chocs peuvent se faire à la hausse ($a_j = 1$ ou $b_j = 1$) au travers de $u_1(j)$ ou $u_2(j)$ ou à la baisse ($a_j = 0$ ou $b_j = 0$) au travers de $v_1(j)$ ou $v_2(j)$. Ainsi à l'instant $n = 1$, suivant l'état initial connu, la structure de taux devient

$$\begin{aligned} r(1,s) &= r(0,s+1) + a_1 \cdot (u_1(1,s+1) - v_1(1,s+1)) + v_1(1,s+1) \\ &\quad + a_2 \cdot (u_2(1,s+1) - v_2(1,s+1)) + v_2(1,s+1), \end{aligned}$$

ce qui peut être représenté sous forme d'un arbre à quatre branches:

$$\begin{array}{lll} & r(0,s) + u_1(1,s) + u_2(1,s) & (a_1 = 1 \quad a_2 = 1) \\ & r(0,s) + u_1(1,s) + v_2(1,s) & (a_1 = 1 \quad a_2 = 0) \\ r(0,s) & r(0,s) + v_1(1,s) + u_2(1,s) & (a_1 = 0 \quad a_2 = 1) \\ & r(0,s) + v_1(1,s) + v_2(1,s) & (a_1 = 0 \quad a_2 = 0) \\ n = 0 & n = 1 & \end{array}$$

Chaque point du réseau est ensuite le départ de quatre branches à l'instant suivant, suivant la hausse ou la baisse des deux facteurs.

On peut en particulier expliciter l'évolution du taux SPOT, c'est-à-dire du taux au comptant sur une période, noté $r(n)$:

$$\begin{aligned} r(n) = r(n,1) &= r(0,n+1) + \sum_{j=1}^{n} a_j \cdot [u_1(j,n+1) - v_1(j,n+1)] \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n} v_1(j,n+1) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n} b_j \cdot [u_2(j,n+1) - v_2(j,n+1)] \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n} v_2(j,n+1). \end{aligned} \tag{5.31}$$

Nous pouvons également obtenir la forme des prix des zéro-coupon; en notant $P(n,s)$, le prix à l'instant n d'une obligation zéro-coupon, de durée s (échéant donc à l'instant $n+s$), il vient

$$P(n,s) = \exp\left(-\sum_{j=1}^{s} r(n,j)\right). \tag{5.32}$$

On peut obtenir une équation récursive pour ce taux, compte tenu de la relation récursive des taux à terme:

$$\begin{aligned} r(n,j) &= r(n-1,j+1) + a_n \cdot [u_1(n,n+j) - v_1(n,n+j)] + v_1(n,n+j) \\ &\quad + b_n \cdot [u_2(n,n+j) - v_2(n,n+j)] + v_2(n,n+j), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(n+1,s) &= \exp\left(-\sum_{j=1}^{s} r(n+1,j)\right) \\ &= \exp\left(-\sum_{j=1}^{s} r(n,j+1)\right) \cdot \exp\left[-a_{n+1}\left(\sum_{j=1}^{s} u_1(n+1,n+1+j)\right.\right. \\ &\quad \left. -v_1(n+1,n+1+j)\right) \\ &\quad - \sum_{j=1}^{s} v_1(n+1,n+1+j) - b_{n+1}\left(\sum_{j=1}^{s} u_2(n+1,n+1+j)\right. \\ &\quad \left.\left. -v_2(n+1,n+1+j)\right) - \sum_{j=1}^{s} v_2(n+1,n+1+j)\right]. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \exp\left(-\sum_{j=1}^{s} r(n,j+1)\right) &= \exp\left(-\sum_{j=0}^{s} r(n,j+1)\right) \cdot \exp(r(n,1)) \\ &= \frac{P(n,s+1)}{P(n,1)}. \end{aligned}$$

Il vient donc une expression de récurrence qui rappelle les relations (5.23) et (5.24) du modèle de Ho et Lee:

$$\begin{aligned} P(n+1,s) &= \frac{P(n,s+1)}{P(n,1)} \cdot \exp\left(-a_{n+1} \cdot \left(\sum_{j=1}^{s} u_1(n+1,n+1+j)\right.\right. \\ &\quad \left. -v_1(n+1,n+1+j)\right) \\ &\quad - \sum_{j=1}^{s} v_1(n+1,n+1+j) - b_{n+1} \cdot \left(\sum_{j=1}^{s} u_2(n+1,n+1+j)\right. \\ &\quad \left.\left. -v_2(n+1,n+1+j) - \sum_{j=1}^{s} v_2(n+1,n+1+j)\right)\right. . \end{aligned} \tag{5.33}$$

Quatre possibilités se présentent selon les valeurs des deux variables aléatoires a_{n+1} et b_{n+1}.

Ainsi, s'il y a hausse des deux facteurs (c'est-à-dire $a_n = b_n = 1$, et donc hausse des taux entre n et $n+1$), l'équation récursive donne

$$P(n+1,s) = \frac{P(n,s+1)}{P(n,1)}$$

$$\times \quad \exp\left(-\sum_{j=1}^{s}(u_1(n+1,n+1+j)+u_2(n+1,n+1+j))\right).$$

Outre le prix des zéro-coupon, on peut en introduire la valeur actuelle à l'instant $n=0$, en définissant le processus de prix actualisé, par la relation

$$Z(n,s)=\frac{P(n,s)}{\exp\left(\sum_{j=0}^{n-1} r(j)\right)} \tag{5.34}$$

(l'actualisation se faisant sur chaque période à l'aide du taux SPOT correspondant, défini en (5.31)).

Compte tenu de la relation élémentaire

$$P(n,1)=\exp(-r(n)),$$

la relation récursive (5.33) devient, en termes actualisés,

$$\begin{aligned} Z(n+1,s) \;=\; & Z(n,s+1)\cdot\exp\left(-a_{n+1}\left(\sum_{j=1}^{s}u_1(n+1,n+1+j)\right.\right. \\ & -v_1(n+1,n+1+j)) \\ & -\sum_{j=1}^{s}v_1(n+1,n+1+j)-b_{n+1}\left(\sum_{j=1}^{s}u_2(n+1,\right. \\ & n+1+j)-v_2(n+1,n+1+j)) \\ & \left.\left.-\sum_{j=1}^{s}v_2(n+1,n+1+j)\right)\right). \end{aligned} \tag{5.35}$$

Condition de compatibilité

Comme dans le modèle de Ho et Lee, les mouvements de la structure des taux décrits par la relation (5.30) ne peuvent être quelconques si l'on veut préserver l'hypothèse classique d'absence d'opportunité d'arbitrage: les fonctions u_1, u_2, v_1 et v_2 devront dans ce but satisfaire à une relation de compatibilité.

Dans le modèle de Ho et Lee, l'absence d'opportunité d'arbitrage a conduit à la relation (5.26):

$$P^i(n,\tau+1)=P^i(n,1)\left[p\cdot P^{i+1}(n+1,\tau)+(1-p)P^i(n+1,\tau)\right],$$

où $0<p<1$ est une probabilité dite binomiale implicite. En introduisant en particulier dans cette relation le processus de prix actualisé Z^i, défini par la relation (5.34), l'expression peut se mettre sous la forme:

$$Z^i(n,\tau+1)=p\cdot Z^{i+1}(n+1,\tau)+(1-p)\cdot Z^i(n+1,\tau). \tag{5.36}$$

L'hypothèse d'absence d'arbitrage dans le modèle de Ho et Lee est donc équivalente à l'existence d'une mesure de probabilité telle que le processus prix actualisé d'un zéro-coupon échéant à un instant fixé soit une martingale sous cette mesure (mesure martingale).

Cette propriété, loin d'être une particularité du modèle de Ho et Lee, est en réalité une caractéristique fondamentale des modèles stochastiques de tarification en l'absence d'opportunité d'arbitrage.

Ce principe fondamental, obtenu par Harrison et Pliska (1981), et qui sera démontré dans un cadre discret général au chapitre 3, conduit par analogie, pour le modèle de Heath, Jarrow et Morton, au résultat suivant:

PROPOSITION 2.3

Etant donné une famille de fonctions $\{u_1, u_2, v_1, v_2\}$ engendrant la structure de taux décrite par (5.30), les conditions suivantes sont équivalentes:

(i) la structure de taux engendrée est consistante avec l'hypothèse d'absence d'arbitrages;

(ii) il existe une mesure de probabilité $\{\pi_{00}(j), \pi_{01}(j), \pi_{10}(j), \pi_{11}(j)\}$ pour les variables aléatoires a_j et b_j $(j = 1, \ldots, n)$, telle que le processus prix actualisé des zéro-coupon pour une échéance fixée n soit une martingale, et ce quelle que soit cette échéance n;

(iii) il existe une mesure de probabilité $\{\pi_{00}(j), \pi_{01}(j), \pi_{10}(j), \pi_{11}(j)\}$ pour les variables aléatoires a_j et b_j $(j = 1, \ldots, n)$, telle que:

$$\begin{aligned}
& \pi_{00}(j) \cdot \exp\left(-\sum_{k=1}^{n-j} v_1(j, j+k) + v_2(j, j+k)\right) \\
+ \; & \pi_{01}(j) \cdot \exp\left(-\sum_{k=1}^{n-j} v_1(j, j+k) + u_2(j, j+k)\right) \\
+ \; & \pi_{10}(j) \cdot \exp\left(-\sum_{k=1}^{n-j} u_1(j, j+k) + v_2(j, j+k)\right) \\
+ \; & \pi_{11}(j) \cdot \exp\left(-\sum_{k=1}^{n-j} u_1(j, j+k) + u_2(j, j+k)\right) \\
= \; & 1,
\end{aligned}$$

et ce, quelle que soit l'échéance n et l'instant d'observation j.

Démonstration

Comme précisé ci-avant, l'équivalence entre (i) et (ii) résulte d'un résultat général qui sera démontré au paragraphe 6.1 du chapitre 3.

L'équivalence entre (ii) et (iii) résulte directement de la relation de récurrence

(5.35) qui donne:

$$\begin{aligned} Z(j,n-j) &= Z(j-1,n+1-j)\exp\left(-a_j\left(\sum_{k=1}^{n-j}u_1(j,j+k)-v_1(j,j+k)\right)\right. \\ &\quad -\sum_{k=1}^{n-j}v_1(j,j+k)-b_j\left(\sum_{k=1}^{n-j}u_2(j,j+k)-v_2(j,j+k)\right) \\ &\quad \left.-\sum_{k=1}^{n-j}v_2(j,j+k)\right) \end{aligned} \tag{5.37}$$

Il y a donc bien équivalence entre la relation (iii), et l'aspect martingale du processus Z, sous la mesure de probabilité considérée. ■

Cas particuliers

1) *Modèle à deux chocs aléatoires court/long terme*

La structure des taux à terme est censée être soumise à deux chocs aléatoires, le premier représentant des mouvements à court terme, et le second représentant l'influence du long terme.

Le facteur long terme affecte tous les taux de manière uniforme tandis que le facteur court terme est amorti exponentiellement avec l'échéance. On suppose de plus que la distribution des variables de chocs $\{a_j, b_j\}$ est stationnaire dans le temps et est de la forme

$$\begin{aligned} q_{00}(j) &= (1-q_1)(1-q_2) \\ q_{01}(j) &= (1-q_1)q_2 \\ q_{10}(j) &= q_1(1-q_2) \\ q_{11}(j) &= q_1 \cdot q_2. \end{aligned}$$

Il y a donc indépendance des deux chocs. Les volatilités des taux à terme sont supposées telles que

$$\begin{aligned} var[r(n,s)-r(n-1,s+1)|r(n-1,s+1),b_n] &= \sigma_1^2 \\ var[r(n,s)-r(n-1,s+1)|r(n-1,s+1),a_n] &= \sigma_2^2 e^{-\lambda s}. \end{aligned} \tag{5.38}$$

La première expression modélise la variance uniforme de l'effet long terme; la seconde expression modélise la variance amortie exponentiellement de l'effet court terme.

En vue de définir une mesure martingale unique, nous exigeons de celle-ci le caractère stationnaire et les relations d'indépendance

$$\begin{aligned} \pi_{00}(j) &= (1-\pi_1)(1-\pi_2) \\ \pi_{01}(j) &= (1-\pi_1)\cdot\pi_2 \\ \pi_{10}(j) &= \pi_1(1-\pi_2) \\ \pi_{11}(j) &= \pi_1 \cdot \pi_2. \end{aligned} \tag{5.39}$$

En substituant les relations (5.39), dans la condition de non-arbitrage (iii) de la proposition 2.3, on obtient la condition

$$\left\{\pi_1 \cdot \exp\left(-\sum_{k=1}^{n-j} u_1(j,j+k)\right) + (1-\pi_1)\cdot \exp\left(-\sum_{k=1}^{n-j} v_1(j,j+k)\right)\right\}$$

$$\times \left\{\pi_2 \cdot \exp\left(-\sum_{k=1}^{n-j} u_2(j,j+k)\right) + (1-\pi_2)\cdot \exp\left(-\sum_{k=1}^{n-j} v_2(j,j+k)\right)\right\} = 1.$$

En ajoutant l'additivité des deux effets, cette condition devient

$$\pi_1 \cdot \exp\left(-\sum_{k=1}^{n-j} u_1(j,j+k)\right) + (1-\pi_1)\cdot \exp\left(-\sum_{k=1}^{n-j} v_1(j,j+k)\right) = 1, \quad (5.40)$$

et

$$\pi_2 \cdot \exp\left(-\sum_{k=1}^{n-j} u_2(j,j+k)\right) + (1-\pi_2)\cdot \exp\left(-\sum_{k=1}^{n-j} v_2(j,j+k)\right) = 1.$$

Compte tenu de ces diverses relations et conditions, Heath, Jarrow, Morton (1990), montrent que les taux à terme peuvent se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} r(n,s) &= r(0,n+s) + \sum_{j=1}^{n} a_j \cdot \psi_1 + \sum_{j=1}^{n} b_j \cdot \psi_2 \cdot e^{-\frac{\lambda}{2}(n+s-j)} \\ &+ [\log(1+\pi_1(\exp(-(n+s-1)\psi_1)-1)) - \log(1+\pi_1(\exp(-(s-1)\cdot\psi_1)-1))] \\ &+ \sum_{j=1}^{n}\left[\log(1+\pi_2(\exp(-\sum_{i=j+1}^{n+s}\psi_2\cdot\exp(-\frac{\lambda}{2}(i-j)))-1)\right. \\ &\left. - \log(1+\pi_2(\exp(-\sum_{i=j+1}^{n+s-1}\psi_2\cdot\exp(-\frac{\lambda}{2}(i-j)))-1)\right], \end{aligned} \quad (5.41)$$

où:

$$\psi_1 = \sigma_1/(q_1(1-q_1))^{1/2} \text{ et } \psi_2 = \sigma_2/(q_2(1-q_2))^{1/2}.$$

2) *Modèle à un choc aléatoire, modèle de Ho et Lee*

Montrons que le modèle de Ho et Lee est un cas particulier de ce modèle, en présence d'un seul choc aléatoire.

On suppose dans ce cas: $u_2 = v_2 \equiv 0$.

En utilisant le modèle à deux chocs vu ci-dessus et y posant $\sigma_2 \equiv 0$, les conditions (5.38) de variance uniforme et (5.40) de non-arbitrage deviennent:

$$var[(r(n,s) - r(n-1,s+1))|r(n-1,s+1)] = \sigma^2 \quad (5.42)$$

$$\pi \cdot \exp\left(-\sum_{k=1}^{n-j} u(j,j+k)\right) + (1-\pi)\cdot \exp\left(-\sum_{k=1}^{n-j} v(j,j+k)\right) = 1 \quad (5.43)$$

La relation (5.43) rappelle la condition d'arbitrage (5.25) du modèle de Ho et Lee; ceci résulte directement de la relation (5.33), qui montre qu'en présence d'un seul effet, la perturbation entre l'instant $n-1$ et l'instant n du prix actualisé d'un zéro-coupon d'échéance fixée est donnée par:

	Ho et Lee	HJM
en cas de hausse des prix	$h(\tau)$	$\exp\left(-\sum_{k=1}^{n-j} v(j,j+k)\right)$
en cas de baisse des prix	$h^*(\tau)$	$\exp\left(-\sum_{k=1}^{n-j} u(j,j+k)\right)$

Montrons que la relation de variance (5.42) est équivalente à la condition de neutralité (5.28) de Ho et Lee:

$$var[(r(n,s)-r(n-1,s+1))|r(n-1,s+1)] =$$

$$= var[a_n \cdot [u(n,n+s)-v(n,n+s)]],$$

(a_n étant une variable binaire telle que:

$$P(a_n = 1) = q$$

$$P(a_n = 0) = 1-q).$$

Il vient

$$var[a_n \cdot (u(n,n+s)-v(n,n+s))] = (u(n,n+s)-v(n,n+s))^2 \cdot q \cdot (1-q)$$

La relation (5.42) implique donc

$$(u(n,n+s)-v(n,n+s))^2 = \frac{\sigma^2}{q\cdot(1-q)},$$

ou

$$u(n,n+s) = v(n,n+s) + \frac{\sigma}{(q(1-q))^{1/2}}.$$

Les perturbations sur les prix actualisés des zéro-coupon, compte tenu de (5.37), sont donc liées par

$$\exp\left(-\sum_{k=1}^{s} u(n,n+k)\right) = \exp\left(-\sum_{k=1}^{s} v(n,n+k)\right) \exp\left(-s\cdot\sigma/(q(1-q))^{1/2}\right), \tag{5.44}$$

ce qui rappelle bien l'expression (5.28), en identifiant le coefficient δ:

$$\delta = \exp(-\sigma/(q(1-q))^{1/2})$$

En substituant (5.44) dans l'expression (5.43), il vient

$$\pi \cdot \exp\left(-\sum_{k=1}^{n-j} v(j,j+k)\right) \cdot \delta^{n-j} + (1-\pi) \cdot \exp\left(-\sum_{k=1}^{n-j} v(j,j+k)\right) = 1,$$

ou

$$\exp \sum_{k=1}^{n-j} v(j,j+k) = (1-\pi) + \pi \cdot \delta^{n-j}, \tag{5.45}$$

ce qui est équivalent à la solution (5.27) du modèle de Ho et Lee, moyennant l'identification de p à $1-\pi$:

$$h(n-j) = \frac{1}{p + (1-p)\delta^{n-j}}.$$

Cette nouvelle formulation du modèle de Ho et Lee permet de plus d'obtenir une expression explicite de l'évolution des taux à terme.

Compte tenu de la relation (5.45), il vient

$$\sum_{k=1}^{n-j} v(j,j+k) = \log(1 + \pi(\delta^{n-j} - 1)),$$

dont la solution est

$$v(j,j+k) = \log(1 + \pi(\delta^k - 1)) - \log(1 + \pi(\delta^{k-1} - 1))$$

et

$$u(j,j+k) = \log(1 + \pi(\delta^k - 1)) - \log(1 + \pi(\delta^{k-1} - 1)) - \log \delta.$$

La relation de base (5.30) donne alors:

$$r(n,s) = r(0,n+s) + \sum_{j=1}^{n} a_j \cdot [u(j,n+s) - v(j,n+s)] + \sum_{j=1}^{n} v(j,n+s)$$

$$= r(0,n+s) + \sum_{j=1}^{n} a_j \cdot \frac{\sigma}{(q(1-q))^{1/2}}$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} (\log(1 + \pi \cdot (\delta^{n+s-j} - 1)) - \log(1 + \pi \cdot (\delta^{n+s-j-1} - 1))),$$

ou

$$\begin{aligned} r(n,s) &= r(0,n+s) + \frac{\sigma}{(q(1-q))^{1/2}} \cdot \sum_{j=1}^{n} a_j \\ &+ \log(1 + \pi(\delta^{n+s-1} - 1)) - \log(1 + \pi \cdot (\delta^{s-1} - 1)). \end{aligned} \tag{5.46}$$

Cette expression montre que les courbes de taux engendrées sont parallèles, leur écartement étant un multiple de la constante $\sigma/(q(1-q))^{1/2}$.

REMARQUE: VERSION CONTINUE

Heath, Jarrow et Morton (1987) ont également développé une version continue de ce modèle, les taux à terme étant dans ce cas perturbés non plus par une suite de variables binaires, mais par des intégrales stochastiques par rapport à deux mouvements browniens.

6 Théories de l'immunisation

La section 3 a illustré le risque attaché aux titres obligataires malgré leur apparence sereine. Ce risque est intrinsèquement lié à l'évolution de la courbe des taux d'intérêt et comprend deux composantes:

- le risque de réinvestissement,
- le risque de réalisation.

Comme déjà observé, la variation des taux d'intérêt agit de manière contraire sur ces deux éléments. Ainsi, une hausse des taux a un effet bénéfique sur le réinvestissement des coupons puisque ceux-ci peuvent être placés dans de meilleures conditions; en revanche, cette même hausse dévalue le titre obligataire.

On peut donc penser qu'un certain équilibrage de ces deux phénomènes opposés pourrait se produire, à un certain instant "privilégié"; la revente du titre obligataire à cet instant permettrait ainsi de rester insensible aux mouvements de la courbe de taux observés depuis l'acquisition du titre.

Cette simple observation est à la base de la notion d'immunisation présentée ici.

6.1 Le concept de duration

L'élément clé dans la théorie de l'immunisation est la notion de *duration* d'une obligation. Considérons pour ce un titre obligataire général, tel que défini au paragraphe 2.1, générant les coupons C_i aux temps $i = 1, 2, \ldots, N$, et une valeur de remboursement R_N à l'échéance N, de taux de rendement actuariel r.

DÉFINITION 2.2

La *duration* d'une obligation ainsi définie est donnée par:

$$\mathcal{D} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{C_i}{(1+r)^i} i + \frac{R_N}{(1+r)^N} \cdot N}{\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{C_i}{(1+r)^i} + \frac{R_N}{(1+r)^N}}. \tag{6.1}$$

En termes financiers, cette notion admet deux interprétations.

Interprétation 1: durée de vie moyenne

La formule (6.1) montre que la duration apparaît comme une moyenne pondérée des temps d'arrivée des *cash flows*, les poids étant ces *cash flows* actualisés.

On peut ainsi qualifier la duration de durée de vie moyenne actualisée d'une obligation.

On notera en particulier, que pour une obligation zéro-coupon ($C_i \equiv 0, \forall i$), la duration se confond avec la maturité du titre.

Interprétation 2: indicateur de sensibilité du prix

La duration constitue également un indicateur de sensibilité du prix de l'obligation, à la variation de son taux de rendement.

Pour ce, considérons le prix du titre:

$$P = \sum_{i=1}^{N} C_i \cdot \frac{1}{(1+r)^i} + R_N \frac{1}{(1+r)^N}. \tag{6.2}$$

En dérivant par rapport au taux r, il vient

$$\frac{dP}{dr} = -\sum_{i=1}^{N} iC_i \cdot \frac{1}{(1+r)^{i+1}} - N \cdot R_N \frac{1}{(1+r)^{N+1}}. \tag{6.3}$$

Les formules (6.2) et (6.3) impliquent que la duration peut être définie par

$$\mathcal{D} = -(1+r) \cdot \frac{dP}{dr}/P. \tag{6.4}$$

Inversement, la duration peut être utilisée pour déterminer l'impact d'une variation du taux du marché sur le taux de l'obligation, compte tenu de la relation différentielle

$$\frac{dP}{P} = -\mathcal{D} \cdot \frac{dr}{(1+r)}. \tag{6.5}$$

La *duration modifiée*, parfois utilisée, est définie par

$$\mathcal{D}^* = \frac{\mathcal{D}}{(1+r)}.$$

Cas particuliers

Etudions la forme de la duration pour certains types particuliers d'obligation.

a) *Obligation zéro-coupon*

Comme déjà signalé, la duration d'une obligation zéro-coupon se confond avec sa maturité; il s'agit là d'une caractéristique propre aux zéro-coupon. Les obligations à coupon ont toujours une duration strictement inférieure à leur maturité.

b) *Obligation classique au pair*

Calculons la duration d'une obligation classique remboursée au pair, telle que définie au paragraphe 2.4.

Nous noterons i, le taux nominal, et N, la durée. La duration devient:

$$\mathcal{D} = \frac{\sum_{j=1}^{N} i \cdot j \cdot v^j + N \cdot v^N}{\sum_{j=1}^{N} i \cdot v^j + v^N}$$

où

$$v = \frac{1}{(1+r)}$$

or a) $\sum_{j=1}^{N} v^j = \frac{1 - v^N}{r}$;

$$\begin{aligned} \text{b) } \sum_{j=1}^{N} j \cdot v^j &= \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{j} v^j = \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=k}^{N} v^j \\ &= \sum_{k=1}^{N} \frac{v^{k-1} - v^N}{r} = \frac{1}{r} \sum_{k=1}^{N} v^{k-1} - N \frac{v^N}{r} \\ &= \frac{1}{r} \frac{1 - v^N}{1 - v} - N \cdot \frac{v^N}{r} = \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{1 - v} - \frac{v^N}{r} \cdot \left(\frac{1}{1 - v} + N \right) \end{aligned}$$

et donc:

$$\mathcal{D} = \frac{i \cdot \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{1}{1 - v} - \frac{v^N}{r} \cdot \left(\frac{1}{1 - v} + N \right) \right] + N v^N}{i \cdot \frac{1 - v^N}{r} + v^N} \tag{6.6}$$

On peut montrer facilement à partir de (6.6) que toute autre chose restant égale:

1) la duration est une fonction décroissante du taux nominal.

Exemple: durée $N = 7$ ans, taux de rendement $r = 8\%$

taux nominal	duration
i	$\mathcal{D}$
0	7
2%	6,5
4%	6,13
8%	5,62
10%	5,44

2) la duration est une fonction décroissante du taux de rendement.

Exemple: durée $N = 7$ ans, taux nominal $i = 10\%$

taux rendement	duration
r	$\mathcal{D}$
0	5,76
2%	5,69
4%	5,61
8%	5,44

3) la duration est une fonction croissante de la durée de vie de l'obligation. Elle admet néanmoins une valeur limite:

$$\lim_{N\to\infty} \mathcal{D} = \frac{i \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{1-v}}{i \cdot \frac{1}{r}} = \frac{1}{1-v} = 1 + \frac{1}{r}.$$

Cette valeur limite est indépendante du taux nominal de l'obligation.

Un concept dérivé de la notion de duration est celui de convexité.

DÉFINITION 2.3

La *convexité* d'une obligation, de duration (6.1), est donnée par:

$$C = \frac{\sum_{i=1}^{N} \frac{C_i}{(1+r)^i} \cdot i(i+1) + \frac{R_N}{(1+r)^N} \cdot N(N+1)}{\sum_{i=1}^{N} \frac{C_i}{(1+r)^i} + \frac{R_N}{(1+r)^N}}. \tag{6.7}$$

En termes financiers, cette notion peut être interprétée comme *mesure de sensibilité du second ordre* du prix.

Considérons pour ce, la formule (6.2) du prix P; en dérivant deux fois, il vient

$$\frac{d^2P}{dr^2} = \sum_{i=1}^{N} i(i+1)C_i \cdot \frac{1}{(1+r)^{i+2}} + N \cdot (N+1) \cdot R_N \cdot \frac{1}{(1+r)^{N+2}}.$$

La définition (6.7) peut donc se réécrire

$$C = (1+r)^2 \frac{d^2P}{dr^2}/P. \tag{6.8}$$

Compte tenu des relations (6.4) et (6.8), la duration et la convexité peuvent donc être utilisées conjointement pour estimer l'effet sur le prix d'une obligation d'une variation de faible amplitude des taux de rendement sur le marché.

Un développement du premier ordre conduit à une première approximation:

$$\Delta P_1 = -\frac{\mathcal{D}}{(1+r)} \cdot P \cdot \Delta r, \tag{6.9}$$

où Δr = variation du taux de rendement,

ΔP_1 = estimation du premier ordre de la variation correspondante du prix.

Le développement du second ordre fera jouer conjointement duration et convexité:

$$\Delta P_2 = -\frac{\mathcal{D}}{(1+r)} \cdot P \cdot \Delta r + \frac{1}{2}\frac{C}{(1+r)^2} \cdot P \cdot (\Delta r)^2. \tag{6.10}$$

EXEMPLE 2.4

- Soit une obligation classique de taux nominal $i = 10\%$, de durée restant à courir égale à 7 ans, le taux de rendement étant de 8%.

  Les caractéristiques de cette obligation sont:

$$P = \sum_{j=1}^{7} \frac{0,1}{(1,08)^j} + \frac{1}{(1,08)^7} = 1,10413$$

$$\mathcal{D} = \frac{\sum_{j=1}^{7} j \cdot \frac{0,1}{(1,08)^j} + \frac{7}{(1,08)^7}}{1,10413} = 5,44$$

$$C = \frac{\sum_{j=1}^{7} j(j+1)\frac{0,1}{(1,08)^j} + \frac{56}{(1,08)^7}}{1,10413} = 39,624.$$

- Mesurons l'influence sur le prix de l'obligation, d'un changement du taux de marché de 8% à 7,80%:

1. *calcul exact*

$$P = \sum_{j=1}^{7} \frac{0,1}{(1,078)^j} + \frac{1}{(1,078)^7} = 1,11533$$

2. *approximation du premier ordre*

$$\begin{aligned} P_1 &= P - \frac{\mathcal{D}}{(1+r)} \cdot P \cdot \Delta r \\ &= 1,10413 + 5,037 \times 1,10413 \times 0,20\% = 1,11525 \end{aligned}$$

3. *approximation du second ordre*

$$\begin{aligned} P_2 &= P - \frac{\mathcal{D}}{(1+r)} \cdot P \cdot \Delta r + \frac{1}{2}\frac{C}{(1+r)^2} \cdot P \cdot (\Delta r)^2 \\ &= 1,10413 + 5,037 \times 1,10413 \times 0,20\% + \frac{1}{2} \times 33,9715 \\ &\quad \times 1,10413 \times (0,20\%)^2 \\ &= 1,11533 \end{aligned}$$

Cette estimation basée sur la duration et la convexité est donc meilleure.

REMARQUE

Si on se limite à l'approximation du second ordre, on constate qu'à rendement et duration fixés, il y a lieu de préférer l'obligation de plus grande convexité, compte tenu de ce que la variation de son prix sera toujours meilleure, pour une variation faible du taux de rendement, et ce, aussi bien à la hausse qu'à la baisse.

DURATION GÉNÉRALISÉE

La formule (6.1) de la duration, par sa formulation même, revient à supposer une courbe plate des taux de rendement sur le marché.

On peut néanmoins sans difficultés généraliser la définition, dans le cadre d'une structure temporelle quelconque des taux.

En introduisant les taux au comptant des obligations zéro-coupon, tels que définis en (4.1), le prix (6.2) du titre obligataire envisagé peut se réécrire

$$P = \sum_{i=1}^{N} C_i \cdot \frac{1}{(1+R(0,i))^i} + R_N \cdot \frac{1}{(1+R(0,N))^N}. \tag{6.11}$$

La définition 2.2 se généralise alors sans peine:

DÉFINITION 2.4

La *duration généralisée* d'une telle obligation est donnée par

$$\mathcal{D} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \frac{C_i}{(1+R(0,i))^i} \cdot i + \frac{R_N}{(1+R(0,N))^N} \cdot N}{\sum_{i=1}^{N} \frac{C_i}{(1+R(0,i))^i} + \frac{R_N}{(1+R(0,N))^N}} \tag{6.12}$$

Si l'interprétation de cette duration en terme de durée de vie moyenne est évidente, on peut également lui associer un rôle d'indicateur de sensibilité, dans le cas d'un déplacement parallèle de la courbe des taux. En effet, dans le cadre d'une structure de taux, le prix (6.11) devient une fonction de N variables $(R(0,1), R(0,2), \ldots, R(0,N))$.

En différentiant l'expression (6.11), il vient

$$dP = -\sum_{i=1}^{N} C_i \cdot \frac{i}{(1+R(0,i))^{i+1}} dR(0,i) - N \cdot R_N \cdot \frac{1}{(1+R(0,N))^{N+1}} dR(0,N). \tag{6.13}$$

En se limitant à des déplacements parallèles, dans l'espace des variables $R(0,1)$, $R(0,2), \ldots, R(0,N)$, on peut noter:

$$dR(0,1) = dR(0,2) \ldots = dR(0,N) = dR,$$

et il vient

$$dP = \left(-\sum_{i=1}^{N} C_i \frac{i}{(1+R(0,i))^{i+1}} - NR_N \cdot \frac{1}{(1+R(0,N))^{N+1}} \right) dR.$$

On peut généraliser alors l'expression (6.5) en introduisant à nouveau une duration modifiée:

$$\frac{dP}{P} = -\mathcal{D}^* \cdot dR,$$

où

$$\mathcal{D}^* = \frac{\left(\sum_{i=1}^{N} \frac{C_i}{(1+R(0,i))^{i+1}} \cdot i + \frac{R_N}{(1+R(0,N))^{N+1}} \cdot N \right)}{P}.$$

Si l'on désire analyser la sensibilité du titre obligataire, aux déplacements non parallèles de la courbe des taux, on peut introduire la notion de duration partielle (Reitano (1991)).

DÉFINITION 2.5

Le vecteur des *durations partielles* de l'obligation de prix défini en (6.11) est le vecteur

$$\bar{\mathcal{D}} = (\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \ldots, \mathcal{D}_N),$$

où:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_j &= -\frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial R(0,j)} \qquad (j = 1, \ldots, N) \\ &= \frac{j \cdot C_j/(1+R(0,j))^j}{\sum_{i=1}^{N} \frac{C_i}{(1+R(0,i))^i} + \frac{R_N}{(1+R(0,N))^N}}. \end{aligned} \tag{6.14}$$

EXEMPLE 2.5

- Soit une obligation classique de taux nominal $i = 10\%$, de durée restant à courir égale à 3 ans.
On suppose que la structure des taux au comptant est:

$$\begin{aligned} R(0,1) &= 8\% \\ R(0,2) &= 9\% \\ R(0,3) &= 10\%. \end{aligned}$$

Les caractéristiques de cette obligation sont alors:
- prix : $P = \frac{0,1}{1,08} + \frac{0,1}{(1,09)^2} + \frac{1,1}{(1,1)^3} = 1,0032$

- durations partielles :

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_1 &= \frac{1}{P} \times \frac{0,1}{(1,08)^2} = 0,0854 \\ \mathcal{D}_2 &= \frac{1}{P} \times \frac{0,1 \times 2}{(1,09)^3} = 0,1539 \\ \mathcal{D}_3 &= \frac{1}{P} \times \frac{1,1 \times 3}{(1,1)^4} = 2,2467.\end{aligned}$$

Supposons que la courbe des taux se déplace de manière non parallèle, telle que:

$$\begin{aligned}R(0,1)' &= 7\% = R(0,1) + \Delta R(0,1) \\ R(0,2)' &= 10\% = R(0,2) + \Delta R(0,2) \\ R(0,3)' &= 9\% = R(0,3) + \Delta R(0,3).\end{aligned}$$

Le nouveau prix s'établit à:

$$P' = \frac{0,1}{1,07} + \frac{0,1}{(1,1)^2} + \frac{1,1}{(1,09)^3} = 1,0255.$$

Une approximation du premier ordre basée sur les durations partielles donne:

$$\begin{aligned}P' &= P \cdot (1 - \mathcal{D}_1 \cdot \Delta R(0,1) - \mathcal{D}_2 \cdot \Delta R(0,2) - \mathcal{D}_3 \cdot \Delta R(0,3)) \\ &= 1,0251.\end{aligned}$$

6.2 Immunisation classique

6.2.1 Constatation empirique

Nous avons vu au paragraphe 3.2, que la stratégie dite naïve de la maturité, consistant à conserver le titre obligataire jusqu'à son terme, ne permet pas, en cas de mouvement des taux d'intérêt sur le marché, d'obtenir au terme un rendement, égal au taux de rendement actuariel *ex ante*, le risque de réinvestissement des coupons venant perturber l'opération. Nous avons également mis en lumière, qu'en cas de réalisation anticipée du titre, un autre risque apparaissait: le risque de plus- ou moins-value sur la réalisation du titre.

Ce cumul de risque en cas de réalisation anticipée est quelque peu amorti du fait de l'influence contraire d'une variation des taux sur le marché sur ces deux risques. On peut se demander si, dans certaines circonstances, il n'existe pas un "instant optimal" de réalisation, où ces deux risques - réinvestissement des coupons et plus- ou moins-values - se compensent exactement.

L'exemple qui suit, montre que cet instant n'est autre que la duration de l'obligation.

EXEMPLE 2.6

- Soit une obligation classique de taux nominal $i = 10\%$, de durée restante à courir égale à 7 ans, le taux de rendement étant de 8% (voir exemple 2.4). Son prix est alors de 1,10413, et sa duration de 5,44 années.
- Considérons deux scénarios de variation du taux de rendement sur le marché, censés se produire juste après achat de l'obligation:
  - scénario 1: hausse du taux à 9%,
  - scénario 2: baisse du taux à 7%.
- Calculons, dans ces deux situations, le rendement obtenu:
  - en utilisant la stratégie de la maturité;
  - en utilisant la stratégie de la duration.

a) *Stratégie de la maturité*

Dans ce cas, le titre est vendu à son terme en $t = 7$, et la fortune finale de l'investisseur, est donnée par:

- *scénario 1*: $W_1(7) = \sum_{j=1}^{7}(0,1)\cdot(1,09)^{j-1} + 1 = 1,920043$;

- *scénario 2*: $W_2(7) = \sum_{j=1}^{7}(0,1)\cdot(1,07)^{j-1} + 1 = 1,865402$.

Les taux de rendement à l'échéance sont donc:

$$r_e(1) = \sqrt[7]{\frac{1,920043}{1,10413}} - 1 = 0,0822,$$

$$r_e(2) = \sqrt[7]{\frac{1,865402}{1,10413}} - 1 = 0,0778.$$

Ces taux de rendement effectifs diffèrent du taux de rendement attendu à l'origine, de 8%.

b) *Stratégie de la duration*

Dans ce cas, le titre est liquidé avant terme en $t = 5,44$, et il y a lieu de calculer, dans chacun des deux scénarios, le prix de vente obtenu:

- *scénario 1*

  - prix:

$$P_1(5,44) = \frac{1}{(1,09)^{0,56}}\cdot\left[\sum_{j=0}^{1}(0,1)\cdot\frac{1}{(1,09)^j} + \frac{1}{(1,09)}\right] = 1,05692$$

  - fortune:

$$\begin{aligned} W_1(5,44) &= P_1(5,44) + \sum_{j=1}^{5}(0,1)\cdot(1,09)^{j-1}\cdot(1,09)^{0,44} \\ &= 1,05692 + 0,62160 = 1,67852 \end{aligned}$$

- rendement:

$$r_e(1) = \sqrt[5,44]{\frac{1,67852}{1,10413}} - 1 = 0,08;$$

- *scénario 2*

- prix:

$$P_2(5,44) = \frac{1}{(1,07)^{0,56}} \cdot \left[\sum_{j=0}^{1}(0,1) \cdot \frac{1}{(1,07)^j} + \frac{1}{(1,07)}\right] = 1,08610$$

- fortune:

$$W_2(5,44) = P_2(5,44) + \sum_{j=1}^{5}(0,1) \cdot (0,7)^{j-1} \cdot (1,07)^{0,44} = 1,67854$$

- rendement:

$$r_e(2) = \sqrt[5,44]{\frac{1,67854}{1,10413}} - 1 = 0,08$$

CONCLUSION

L'exemple montre que dans les conditions envisagées (une seule modification de taux se produisant juste après l'achat du titre, et d'amplitude "raisonnable"), la stratégie de la duration permet d'obtenir, qu'il y ait hausse ou baisse des taux sur le marché, le taux de rendement initialement attendu; on parle alors d'une stratégie d'immunisation: l'investisseur a réussi sur l'horizon de temps considéré à s'immuniser contre le risque de taux.

A partir de cette observation élémentaire, divers modèles dits d'immunisation se sont développés: ces modèles ont tous pour ambition, d'indiquer, dans certaines conditions, la stratégie à suivre par l'investisseur pour se protéger contre l'impact d'un mouvement des taux sur le marché, sur sa situation patrimoniale. Nous développons ci-dessous quelques-uns de ces modèles.

6.2.2 Immunisation de titres obligataires

L'approche intuitive présentée ci-dessus d'immunisation d'une obligation, sur la base de la stratégie de la duration, a été modélisée par Fisher et Weill (1971).

THÉORÈME 2.1

- On considère une obligation à taux fixe, susceptible d'être revendue à tout instant sans frais, de maturité donnée T.
  A l'instant initial $t = 0$, la courbe des taux à terme des zéro-coupon est donnée par
  $$\{r(0,s); 0 \leq s \leq T\},$$
  le prix d'un zéro-coupon étant
  $$P(0,t) = \exp - \int_0^t r(0,\tau)d\tau.$$
- On note $W(s)$, $(0 \leq s \leq T)$, la richesse obtenue en cas de vente de l'obligation à l'instant s, sous l'hypothèse de maintien de la courbe initiale des taux à terme.
- On suppose qu'à l'instant t^* $(0 \leq t^* \leq T)$, la courbe des taux subit un choc constant:
  $$r(t^*,s) = r(0,s) + \Delta \qquad t^* \leq s \leq T$$
  où Δ est constant, de faible amplitude (positif ou négatif). La courbe est ensuite supposée ne plus subir de chocs.
- On note $W^*(s)$, $(0 \leq s \leq T)$, la richesse ootenue, dans le cadre de ce scénario.
- On note $\mathcal{D}$ la duration initiale du titre $(\mathcal{D} \leq T)$.

Thèse

$$W^*(\mathcal{D}) \geq W(\mathcal{D})$$

quelle que soit la perturbation Δ, appartenant à un voisinage de zéro.

Démonstration

Toute obligation à taux fixe pouvant être décomposée en une somme d'obligations zéro-coupon, il suffit de démontrer le résultat, d'abord pour une obligation zéro-coupon, ensuite pour un portefeuille composé de plusieurs obligations zéro-coupon.

Etape 1: une obligation zéro-coupon

Le résultat est évident. Pour une obligation zéro-coupon, la duration se confond avec la maturité du titre. En revendant le zéro-coupon à sa maturité, il n'y a ni risque de réinvestissement des coupons (en l'absence de coupons), ni risque de réalisation, étant à l'échéance du titre. Une modification, en cours de vie du titre, de la structure des taux, n'a aucun effet.

Etape 2: deux obligations zéro-coupon

On considère deux obligations zéro-coupon A et B, de maturité respective t_1 et t_2 $(0 < t_1 < t_2 \leq T)$. Soit α (respectivement $1-\alpha$), la fraction de la fortune initiale investie dans le titre A (respectivement B) $(0 < \alpha < 1)$.

Par linéarité de la duration, la duration de ce portefeuille est donnée par

$$\mathcal{D} = \alpha \cdot t_1 + (1-\alpha) \cdot t_2 \qquad (t_1 < \mathcal{D} < t_2).$$

On suppose de plus que le choc sur la structure des taux est antérieur aux deux maturités:

$$0 < t^* < t_1 < \mathcal{D} < t_2.$$

Lorsqu'un zéro-coupon arrive à terme, on suppose que le produit de sa vente est réinvesti aux taux court terme modélisés par la structure des taux à terme. Calculons dans ce cas $W(\mathcal{D})$ et $W^*(\mathcal{D})$.

a)

$$\begin{aligned} W(\mathcal{D}) &= \alpha \cdot \exp \int_0^{t_1} r(0,s)ds \cdot \exp \int_{t_1}^{\mathcal{D}} r(0,s)ds + (1-\alpha) \cdot \exp \int_0^{\mathcal{D}} r(0,s)ds \\ &= \alpha \cdot (\text{valeur à l'échéance de la première obligation}) \cdot (\text{facteur de réinvestissement}) + (1-\alpha) \cdot (\text{valeur de liquidation anticipée de la seconde obligation}) \\ &= \alpha \cdot \exp \int_0^{\mathcal{D}} r(0,s)ds + (1-\alpha) \cdot \exp \int_0^{\mathcal{D}} r(0,s)ds \\ &= \exp \int_0^{\mathcal{D}} r(0,s)ds; \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} W^*(\mathcal{D}) &= \alpha \cdot \exp \int_0^{t_1} r(0,s)ds \cdot \exp \int_{t_1}^{\mathcal{D}} r(t^*,s)ds \\ &\quad + (1-\alpha) \cdot \exp \int_0^{t_2} r(0,s)ds \cdot \exp \int_{\mathcal{D}}^{t_2} -r(t^*,s)ds \\ &= \alpha \cdot \exp \int_0^{t_1} r(0,s)ds \cdot \exp \int_{t_1}^{\mathcal{D}} (r(0,s)+\Delta)ds \\ &\quad + (1-\alpha) \cdot \exp \int_0^{t_2} r(0,s)ds \cdot \exp \int_{t_2}^{\mathcal{D}} (r(0,s)+\Delta)ds \\ &= \alpha \cdot e^{\Delta(\mathcal{D}-t_1)} \cdot \exp \int_0^{\mathcal{D}} r(0,s)ds + (1-\alpha) \cdot e^{\Delta(\mathcal{D}-t_2)} \cdot \exp \int_0^{\mathcal{D}} r(0,s)ds \\ &= W(\mathcal{D}) \cdot \left(\alpha \cdot e^{\Delta(\mathcal{D}-t_1)} + (1-\alpha)e^{\Delta(\mathcal{D}-t_2)}\right). \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \frac{W^*(\mathcal{D})}{W(\mathcal{D})} &= \alpha \cdot e^{\Delta(\mathcal{D}-t_1)} + (1-\alpha)e^{\Delta(\mathcal{D}-t_2)} \\ &= \varphi(\Delta). \end{aligned}$$

Ce rapport est considéré comme une fonction du choc Δ. Etudions le comportement de cette fonction φ au voisinage de zéro. On a:

$$\varphi(0) = 1.$$

Montrons que: $\varphi'(0) = 0$ et $\varphi''(0) > 0$. La thèse en résultera.
On a successivement

a)

$$\begin{aligned} \varphi'(\Delta) &= \alpha \cdot (\mathcal{D} - t_1)e^{\Delta(\mathcal{D}-t_1)} + (1-\alpha)(\mathcal{D} - t_2)e^{\Delta(\mathcal{D}-t_2)} \\ \varphi'(0) &= \alpha(\mathcal{D} - t_1) + (1-\alpha)(\mathcal{D} - t_2) \\ &= \mathcal{D} - (\alpha t_1 + (1-\alpha) \cdot t_2) = 0 \end{aligned}$$

par la définition de $\mathcal{D}$.
b) $\varphi''(\Delta) = \alpha(\mathcal{D} - t_1)^2 e^{\Delta(\mathcal{D}-t_1)} + (1-\alpha)(\mathcal{D} - t_2)^2 e^{\Delta(\mathcal{D}-t_2)}$
$\varphi''(0) = \alpha \cdot (\mathcal{D} - t_1)^2 + (1-\alpha) \cdot (\mathcal{D} - t_2)^2 > 0$

- Le même résultat peut être obtenu dans le cas d'un choc postérieur à la maturité du premier titre.
- D'autre part, le même résultat peut être également obtenu dans le cas, non pas de 2 zéro-coupon, mais d'un nombre fini de zéro-coupon.

Ceci permet donc de conclure, pour une obligation à taux fixe. ∎

REMARQUE

L'immunisation ainsi obtenue est limitée:
- elle ne s'applique que pour des variations petites de taux (aspect local);
- elle suppose un déplacement parallèle de la courbe des taux.

Cette dernière limitation a été progressivement levée et remplacée par des hypothèses plus générales sur la forme de la perturbation.

Nous présenterons une telle extension, basée sur une propriété de convexité, dans le cadre du paragraphe suivant, consacré à l'application des théories de l'immunisation à la gestion actif-passif.

6.3 Application de l'immunisation: Assets Liabilities Management

L'une des applications les plus fécondes des théories de l'immunisation concerne la gestion actif-passif, communément intitulée dans la littérature financière l'ALM (*Assets Liabilities Management*).

On suppose dans ce cadre qu'un opérateur financier doit honorer dans l'avenir divers engagements (*Liabilities*) échelonnés dans le temps, qu'il finance grâce à divers revenus (*Assets*) également échelonnés dans le temps, générés par

un portefeuille d'actifs qu'il détient. On suppose généralement, qu'à l'origine, il y a équilibre entre la valeur actuelle des engagements et la valeur actuelle des revenus, l'actualisation se faisant à l'aide de la structure initiale des taux (ou du taux initial, si on utilise une structure plate de taux).

Le problème principal de la gestion actif-passif est alors le suivant: *sous quelles conditions, cet équilibre initial entre actifs et passifs se maintient-il* (ou s'améliore-t-il éventuellement) *en cas de modification ultérieure de la structure de la courbe des taux?*

Une première réponse triviale à ce problème est fournie par la notion de portefeuille d'actifs dédicacé à une structure d'engagements. On considère pour ce:

- d'une part, un portefeuille d'engagements connus noté $(L_{t_1}, L_{t_2}, \ldots, L_{t_n})$, L_{t_i} représentant l'engagement à verser à l'époque t_i;
- d'autre part, un portefeuille d'actifs générant des revenus connus notés $(A_{t_1}, A_{t_2}, \ldots, A_{t_n})$, A_{t_i} représentant le revenu généré à l'époque t_i.

D'une manière générale, certains éléments de ces deux vecteurs peuvent être nuls; il n'y a pas nécessairement coïncidence entre le paiement d'un engagement, et la perception d'un revenu.

DÉFINITION 2.6

Le portefeuille d'actifs $(A_{t_1}, A_{t_2}, \ldots, A_{t_n})$ est dédicacé au portefeuille d'engagements $(L_{t_1}, L_{t_2}, \ldots, L_{t_n})$ ssi:

$$A_{t_i} = L_{t_i} \qquad \forall i.$$

COROLLAIRE

Lorsqu'un portefeuille d'actifs est dédicacé à un portefeuille d'engagements, l'équilibre des valeurs actuelles est maintenu, quelle que soit la structure des taux.

Dans ce cas particulièrement "rassurant" pour l'opérateur, les conditions du marché financier, modélisées par la structure des taux, sont indifférentes: les revenus permettent à chaque instant d'exactement payer les engagements.

Il s'agit donc là d'une condition suffisante d'immunisation.

Cette situation, éminemment confortable, est malheureusement en pratique rare, voire utopique: il n'y a jamais parfaite adéquation entre les revenus et les engagements.

On peut alors se demander, dans le cas où il n'y a pas cette dédicace, s'il est encore possible de trouver des conditions d'immunisation.

La réponse, a été fournie, dans le cas d'une structure plate des taux par Redington dès 1952, dans une étude concernant l'exposition des compagnies d'assurance-vie au risque de taux d'intérêt.

THÉORÈME 2.2

- On considère un portefeuille d'engagements et un portefeuille d'actifs équilibrés compte tenu du taux d'actualisation initial noté δ:

$$\sum_{i=0}^{N} A_{t_i} e^{-\delta t_i} = \sum_{i=0}^{N} L_{t_i} e^{-\delta t_i} . \tag{6.15}$$

- On désire que cet équilibre soit maintenu, voire amélioré, en cas de modification du taux du marché δ, qu'il s'agisse d'un mouvement à la hausse ou à la baisse de ce taux, de faible amplitude.

- Une condition suffisante est que l'on ait simultanément:

a)

$$\sum_{i=0}^{N} A_{t_i} e^{-\delta t_i} = \sum_{i=0}^{N} L_{t_i} e^{-\delta t_i}$$

b)

$$\sum_{i=0}^{N} t_i \cdot A_{t_i} \cdot e^{-\delta t_i} = \sum_{i=0}^{N} t_i \cdot L_{t_i} \cdot e^{-\delta t_i} \tag{6.16}$$

c)

$$\sum_{i=0}^{N} t_i^2 \cdot A_{t_i} e^{-\delta t_i} > \sum_{i=0}^{N} t_i^2 \cdot L_{t_i} \cdot e^{-\delta t_i} \tag{6.17}$$

Démonstration

On note $N_{t_i} = A_{t_i} - L_{t_i}$ et on définit le surplus actualisé au taux d'actualisation δ par:

$$S(\delta) = \sum_{i=0}^{N} N_{t_i} \cdot e^{-\delta t_i}.$$

Nous cherchons des conditions nous assurant que lorsque δ passe à $\delta + \epsilon$, on ait:

$$S(\delta + \epsilon) \geq S(\delta)$$

(ϵ positif ou négatif, mais suffisamment petit).

Un développement en série de Taylor donne

$$S(\delta + \epsilon) = S(\delta) + \epsilon S'(\delta) + \epsilon^2 S''(\delta + \xi)/2$$

$$\text{où } |\xi| \in [0, \epsilon] .$$

Si ϵ est suffisamment petit, $S''(\delta + \xi) \geq 0$, et la thèse en résulte, compte tenu de ce que:

$$S'(\delta) = \sum_{i=0}^{N} t_i \cdot N_{t_i} \cdot e^{-\delta t_i} = 0 \qquad \text{par b),}$$

$$S''(\delta) = \sum_{i=0}^{N} t_i^2 \cdot N_{t_i} e^{-\delta t_i} > 0 \qquad \text{par c).}$$

Et donc:

$$S(\delta + \epsilon) \geq S(\delta).$$

■

REMARQUES

1) Compte tenu de la condition a), la condition b) peut se réécrire:

$$\frac{\sum_{i=0}^{N} t_i \cdot A_{t_i} \cdot e^{-\delta t_i}}{\sum_{i=0}^{N} A_i e^{-\delta t_i}} = \frac{\sum_{i=0}^{N} t_i \cdot L_{t_i} \cdot e^{-\delta t_i}}{\sum_{i=0}^{N} L_{t_i} \cdot e^{-\delta t_i}}, \tag{6.18}$$

ou encore

$$\mathcal{D}_A = \mathcal{D}_L,$$

où $\mathcal{D}_A$ = duration des actifs

$\mathcal{D}_L$ = duration des passifs.

C'est la célèbre formule d'égalité des durations des actifs et des passifs, qui s'ajoute à la condition classique a) d'égalité de valeurs actuelles.

2) Ce modèle de Redington, devenu un paradigme de la gestion financière, n'est pas exempt d'une certaine naïveté; l'hypothèse de déplacement parallèle d'une courbe de taux plate, est notamment contraire aux modèles d'équilibre, et conduit à des opportunités d'arbitrage.

3) Shiu (1990) a généralisé l'approche de Redington au cas d'une structure non plate de taux d'intérêt. Dans ce modèle, toujours déterministe, on suppose que le surplus actualisé à l'aide d'une structure initiale non plate est positif:

$$S(r) = \sum_{i=0}^{N} (A_{t_i} - L_{t_i}) \cdot \exp\left(-\int_0^{t_i} r(0,\tau)d\tau\right) \geq 0.$$

La structure initiale est supposée perturbée par un déplacement non nécessairement parallèle:

$$r^*(0,s) = r(0,s) + \epsilon(s).$$

On cherche à nouveau des conditions pour que

$$S(r^*) \geq S(r).$$

En développant, il vient:

$$S(r^*) - S(r) = \sum_{i=0}^{N} n_{t_i} \cdot [f(t_i) - 1],$$

où

$$\begin{aligned} n_{t_i} &= N_{t_i} \cdot \exp\left(\int_0^{t_i} -r(0,s)ds\right) \\ f(t_i) &= \exp - \int_0^{t_i} \epsilon(s)ds. \end{aligned}$$

En développant en série, la fonction f:

$$\begin{aligned} f(t) &= f(0) + f'(0) \cdot t + \frac{1}{2} f''(\xi_t) \cdot t^2 \qquad (\text{où } \xi_t \in [0,t]) \\ &= 1 - \epsilon(0)t + \frac{1}{2} f''(\xi_t) \cdot t^2. \end{aligned}$$

En substituant:

$$S(r^*) - S(r) = -\epsilon(0) \sum_{i=0}^{N} t_i \cdot n_{t_i} + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N} t_i^2 \cdot n_{t_i} \cdot f''(\xi_{t_i}).$$

En supposant les conditions du théorème de Redington remplies, c'est-à-dire:

$$\sum_{i=0}^{N} t_i n_{t_i} = \sum_{i=0}^{N} t_i (A_{t_i} - L_{t_i}) \cdot \exp \int_0^{t_i} -r(0,\tau)d\tau = 0$$

$$\sum_{i=0}^{N} t_i^2 n_{t_i} = \sum_{i=0}^{N} t_i^2 (A_{t_i} - L_{t_i}) \exp \int_0^{t_i} -r(0,\tau)d\tau > 0,$$

et en supposant de plus, que pour tout w positif:

$$\text{soit } \sum_{i=0}^{N} n_{t_i} (t_i - w)^+ \geq 0$$

$$\text{soit } \sum_{i=0}^{N} n_{t_i} (t_i - w)^+ \leq 0,$$

on peut écrire (voir Shiu (1990)), par le théorème de la moyenne:

$$S(r^*) - S(r) = \frac{1}{2} f''(\bar{\xi}) \cdot \sum_{i=0}^{N} t_i^2 \cdot n_{t_i}.$$

D'autre part:

$$\begin{aligned} f'(t) &= -\epsilon(t) \cdot \exp - \int_0^t \epsilon(s)ds \\ f''(t) &= \epsilon^2(t) \cdot \exp - \int_0^t \epsilon(s)ds - \epsilon'(t) \cdot \exp - \int_0^t \epsilon(s)ds \\ &= f(t) \cdot (\epsilon^2(t) - \epsilon'(t)) \ . \end{aligned}$$

En particulier, si la structure des chocs est telle que $\epsilon^2(\cdot) \geq \epsilon'(\cdot)$, le résultat de Redington se trouve étendu, sous les conditions mentionnées ci-dessus.

6.4 Duration stochastique

La notion de duration introduite précédemment a été définie dans un cadre déterministe de structure de taux.

S'agissant de mesurer la sensibilité d'un titre obligataire au mouvement de la courbe des taux, il n'est guère surprenant que les modèles stochastiques de structure de taux étudiés à la section 5, aient à leur tour engendré une version stochastique de la notion de duration.

On considère pour ce, que le taux d'intérêt instantané - taux SPOT - obéit à l'équation différentielle stochastique (5.1):

$$dr(t) = f(t, r(t))dt + \rho(t, r(t))dw(t),$$

et que le processus prix des obligations zéro-coupon est solution de l'équation aux dérivées partielles (5.7):

$$\frac{\partial P}{\partial t} + (f + \rho \cdot \lambda)\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2}\rho^2 \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - rP = 0,$$

où λ est le prix du risque sur le marché (voir (5.6)).

On génère ainsi la gamme des prix zéro-coupon:

$$\{P(t, s, \omega) = P(t, s, r(t)); t \in [0, s], s \in [0, T]\}.$$

Cette gamme de prix se substitue aux facteurs simples d'actualisation du type $\frac{1}{(1+r)^{s-t}}$ utilisés au paragraphe 6.1, dans la définition de la duration classique.

On dispose de plus d'un titre obligataire à revenu fixe, générant des *cash flows* connus, notés $\bar{C} = (C_1, C_2, \ldots, C_N)$ aux instants futurs $t_1, t_2, \ldots, t_N$,

$$(t < t_1 < t_2 \ldots < t_N).$$

La valeur de ce titre à l'instant t est alors donnée par

$$V(t, r(t), \bar{C}) = \sum_{i=1}^{N} C_i \cdot P(t, t_i, r(t)). \tag{6.19}$$

S'agissant de mesurer la sensibilité de cette valeur aux variations des taux, il semble naturel de définir la grandeur suivante.

DÉFINITION 2.7

Le *risque de base* de l'échéancier $\bar{C}$ est donné par la grandeur

$$\begin{aligned} \Omega(t, r(t), \bar{C}) &= -\frac{1}{V(t, r(t), \bar{C})}\frac{\partial}{\partial r}V(t, r(t), \bar{C}) \\ &= -\frac{1}{V(t, r(t), \bar{C})}\sum_{i=1}^{N} C_i \cdot \frac{\partial}{\partial r}P(t, t_i, r(t)). \end{aligned}$$

La duration stochastique découle directement de celle de risque de base, mais après application d'un changement d'échelle, en vue de maintenir l'égalité entre duration et maturité pour une obligation zéro-coupon.

En notant $\bar{C}_s$, le *cash flow* unitaire engendré en s pour une obligation zéro-coupon de maturité s, il vient,

$$\begin{aligned}\Omega(t,r(t),\bar{C}_s) &= -\frac{1}{P(t,s,r(t))}\frac{\partial}{\partial r}P(t,s,r(t)) \\ &= \varphi(s),\end{aligned}$$

en considérant l'instant t fixé, et en ne retenant que la seule dépendance par rapport à la maturité.

Ceci conduit à la définition de duration stochastique:

DÉFINITION 2.8

La *duration stochastique* de l'échéancier $\bar{C}$ est donnée par la grandeur

$$\begin{aligned}D(t,\bar{C}) &= \varphi^{-1}(\Omega(t,r(t),\bar{C})) - t \\ &= \varphi^{-1}\cdot\left(\frac{\sum_{i=1}^{N}\varphi(t_i)\cdot C_i\cdot P(t,t_i,r(t))}{\sum_{i=1}^{N} C_i\cdot P(t,t_i,r(t))}\right) - t. \qquad (6.20)\end{aligned}$$

En particulier, pour un zéro-coupon de maturité s, on a bien

$$D(t,\bar{C}_s) = s - t\ .$$

EXEMPLE: MODÈLE DE COX, INGERSOLL ET ROSS

En utilisant cette structure de taux présentée au paragraphe 5.3, il vient compte tenu de la relation (5.19):

$$\begin{aligned}P(t,s,r) &= A(t,s)\cdot e^{-B(t,s)r}, \\ \Omega(t,r(t),\bar{C}_s) &= B(t,s) \\ &= \frac{2(\exp(g(s-t))-1)}{(\alpha+\pi+g)(\exp(g(s-t))-1)+2g} = B(s), \qquad (t \text{ fixé})\end{aligned}$$

où α,π,g sont des constantes du modèle.

L'inverse de cette fonction est donné par

$$C(x) = \frac{1}{g}\log\left(1 - \frac{2gx}{x(g+\pi+\alpha)-2}\right) + t,$$

et la duration stochastique s'obtient sans difficulté:

$$D(t,\bar{C}) = C\left(\frac{\sum_{i=1}^{N} B(t_i)\cdot C_i \cdot P(t,t_i,r(t))}{\sum_{i=1}^{N} C_i \cdot P(t,t_i,r(t))}\right) - t. \qquad (6.21)$$

La notion de duration stochastique est également liée à la notion d'immunisation; on peut montrer sans difficultés, la proposition suivante.

PROPOSITION 2.4

Soient $\bar{X}$ et $\bar{Y}$ respectivement un flux d'actifs et un flux de passifs d'échéances fixés $t_1, t_2, \ldots, t_N$. On suppose qu'à l'instant t, on a

$$V(t,r(t),\bar{X}) = V(t,r(t),\bar{Y}),$$

c'est-à-dire

$$\sum_{i=1}^{N} X_i \cdot P(t,t_i,r(t)) = \sum_{i=1}^{N} Y_i \cdot P(t,t_i,r(t)).$$

Alors

$$dV(t,r(t),\bar{X}) = dV(t,r(t),\bar{Y}),$$

si

$$D(t,\bar{X}) = D(t,\bar{Y}).$$

L'égalité des durations stochastiques implique l'égalité des différentielles stochastiques des processus valeur actuelle des actifs et des passifs.

7 Obligations à taux variable

Les sections précédentes ont illustré le risque d'exposition des obligations au risque de taux d'intérêt.

Plutôt alors que de tenter de se protéger grâce à des techniques d'immunisation contre des variations de rendement, une autre approche consiste, en s'appuyant sur cette variabilité, à intégrer dans l'obligation, une liaison des coupons aux conditions de marché.

De tels produits financiers, que nous désignerons sous le vocable général d'obligation à taux variable, sont apparus sur certains marchés.

L'indexation des coupons, sur des taux liés à la date de leur paiement, permet de diminuer fortement le risque de réalisation; il entraîne un meilleur partage du risque.

D'autre part, par rapport à une stratégie d'investissement court terme, qui permet également de suivre l'évolution des taux de marché, les obligations à taux variables conduisent à une réduction des coûts de transaction.

7.1 Définitions générales

Une *obligation à taux variable* est une obligation à coupons pour laquelle le montant des coupons varie en fonction de l'évolution d'un indice défini à l'émission.

En notant $\{C_1, C_2, \ldots, C_N\}$ la suite des coupons d'un tel titre, on note

$$C_t = \alpha \cdot I(t-k, d) + \beta \qquad (t = 1, \ldots, N), \tag{7.1}$$

où α = *marge nominale multiplicative* $(0 < \alpha < 1)$;

$I(t-k, d)$ = *indice* défini comme une moyenne de taux de marché sur un intervalle de temps de longueur d, entre les instants $t-k-d$ et $t-d$;

k = paramètre de retard;

β = *marge nominale additive.*

On peut donc noter

$$I(t-k, d) = \frac{1}{d} \sum_{j=1}^{d} i(t-k-j),$$

où $i(\cdot)$ est la *référence marché* utilisée.

Cette référence marché peut être aussi bien une référence longue (par exemple, taux du marché obligataire) que courte (par exemple, taux monétaire).

En ce qui concerne le paramètre de retard k, on distingue généralement, dans la nomenclature des obligations à taux variable:

- *les obligations à taux révisable*, pour lesquelles $k \geq 1$; on connaît donc la valeur du coupon C_t, dès l'époque $t-1$, c'est-à-dire dès le moment où il commence à courir;
- *les obligations à taux variable* proprement dit, pour lesquelles $k < 1$; on ne connaît donc pas la valeur du coupon C_t, à l'époque $t-1$ où il commence à courir.

En ce qui concerne la marge multiplicative, ces deux valeurs limites sont:

$\alpha = 1$: il y a *indexation complète* des coupons;

$\alpha = 0$: cas des obligations à taux fixe.

La marge multiplicative étant fixée (caractéristique intrinsèque du titre), la marge additive résulte alors des conditions de marché au moment de l'émission de l'obligation. On peut donc considérer, au niveau d'un marché, que cette marge, dépend de l'instant d'émission du titre, et de sa marge multiplicative (et ce, outre les autres caractéristiques du titre: durée, référence,...).

On peut donc noter:

$$\begin{aligned} \beta &= \beta(\alpha, t) \\ &= \text{marge additive à appliquer à un titre émis en } t. \end{aligned}$$

On notera en particulier:

$$\begin{aligned} \beta(1,t) &= \beta_t \\ &= \textit{marge additive standard}, \text{ applicable à un titre complètement indexé émis en } t. \end{aligned} \tag{7.2}$$

7.2 Technique de cristallisation

La méthode traditionnelle d'analyse de ces titres consiste à figer ("à cristalliser") les conditions de marché qui prévalent à l'instant d'évaluation, pour le futur. On se retrouve ainsi *de facto* au cas des instruments à taux fixe.

Considérons en $t = 0$, un instrument à taux variable de coupons de forme (7.1) émis au pair, où on suppose:

$\alpha = 1$ (indexation complète);

$\beta = \beta_0$;

$n =$ durée de vie du titre résiduelle à l'instant courant t.

A l'instant courant t, on notera β_t, la valeur de la marge additive pour un titre similaire, mais émis à la date t (échéant en $t + n$).

On notera $P(t)$ le prix à l'instant t de l'obligation émise à l'origine; les coupons de ce titre à partir de l'instant de cristallisation t sont alors supposés être donnés par

$$\bar{C}_s = I(t-k,d) + \beta_0 \doteq I_t + \beta_0 \qquad (s = t, t+1, \ldots, t+n).$$

On notera la technique de cristallisation dans cette formule: les valeurs futures de l'indice sont fixées à son niveau atteint.

D'autre part, le taux de rendement de marché de ce titre à l'instant t, doit correspondre à celui d'un titre de même nature, émis à l'instant t, c'est-à-dire, $I_t + \beta_t$.

La valeur du titre devient donc

$$P(t) = (I_t + \beta_0) \cdot \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(1 + I_t + \beta_t)^j} + \frac{1}{(1 + I_t + \beta_t)^n},$$

(en supposant une valeur de remboursement unitaire)
ou

$$\begin{aligned} P(t) &= (I_t + \beta_t) \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(1 + I_t + \beta_t)^j} + \frac{1}{(1 + I_t + \beta_t)^n} \\ &\quad + (\beta_0 - \beta_t) \cdot \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(1 + I_t + \beta_t)^j} \\ &= 1 + (\beta_0 - \beta_t) \cdot \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(1 + I_t + \beta_t)^j}. \end{aligned} \tag{7.3}$$

L'écart de prix avec la parité est proportionnel à la différence de marges additives. Cet écart de marges additives est appelé *marge actuarielle cristallisée.*

7.3 Evaluation par arbitrage

La technique de cristallisation présentée ci-dessus, si elle a le mérite de la simplicité, évacue néanmoins le caractère aléatoire, qui conditionne précisément les obligations à taux variables.

Les méthodes stochastiques de tarification par arbitrage se devaient donc de s'appliquer à ce type d'instrument.

Nous développons ci-dessous une technique d'arbitrage pour les obligations à taux révisables; nous indiquerons l'équivalent pour les obligations à taux variable.

On s'intéresse dans ce cadre, à une obligation à taux révisable x, référencée sur l'indice I, de marge multiplicative α, de marge additive $\tilde{\beta}$, émise en $t = 0$. A l'instant courant t, le titre a encore une vie résiduelle égale à n (terme en $t+n$); d'autre part, à l'instant courant t, la marge additive pour un titre émis à cet instant, de terme $t+n$, et de même référence I, est notée $\beta(\alpha, t)$.

On suppose que l'on dispose à l'instant t de la gamme des zéro-coupon (voir (4.4)):

$$P(t,i) = \frac{1}{(1+R(t,i))^i}.$$

On notera également

$$A(t,n) = \sum_{i=1}^{n} P(t,i), \tag{7.4}$$

que nous appellerons annuité.

On considère enfin un titre dit standard y, c'est-à-dire de marge multiplicative unitaire, référence sur le même indice, de marge additive $\beta(t)$, émis à l'instant t. Les coupons des titres x et y sont donc donnés par:

- *titre* x: $C_s^x = \alpha \cdot I(s-k) + \beta$ $(s = t+1, \ldots, t+n)$ (on suppose ici la référence instantanée, et non pas sous forme de moyenne d'indice sur une période; $I(s-k)$ désigne donc la valeur de l'indice à l'instant $s-k$);
- *titre* y: $C_{t+1}^y = I(t) + \beta(t)$ $(s = t+1)$, $C_s^y = I(s-k) + \beta(t)$ $(s = t+2, \ldots, t+n)$.

(Le coupon à l'instant $t+1$, est adapté de telle manière à ne pas faire intervenir de taux antérieurs à la date t d'émission du titre y).

On a alors la relation suivante d'équivalence, qui permet la tarification du titre x.

PROPOSITION 2.5

a) Un placement unitaire en l'instrument x à l'instant t est équivalent au portefeuille composé de:

(1) α unités du titre y;

(2) $\tilde{\beta} - \alpha\beta(t)$ unités d'un titre annuité (voir (7.4));

(3) $(1-\alpha)$ unités d'un zéro-coupon échéant en $t+n$;

(4) $C^x_{t+1} - \alpha I(t) - \tilde{\beta}$ unités d'un zéro-coupon échéant en $t+1$.

b) En l'absence d'opportunité d'arbitrage, le prix à l'instant t de l'instrument x à taux révisable est

$$\begin{aligned} P^x(t) &= \alpha + (\tilde{\beta} - \alpha\beta(t)) \cdot A(t,n) + (1-\alpha)P(t,n) \\ &\quad + (C^x_{t+1} - \alpha I(t) - \tilde{\beta}) \cdot P(t,1). \end{aligned} \tag{7.5}$$

Démonstration

a) Il suffit de montrer que le portefeuille mentionné génère les mêmes flux que l'instrument x:

	$(t+1)$	$(t+2,\ldots,t+n-1)$	$(t+n)$
(1)	$\alpha(I(t)+\beta(t))$	$\alpha(I(s-k)+\beta(t))$	$\alpha(I(t+n-k)+\beta(t)+1)$
(2)	$\tilde{\beta}-\alpha\cdot\beta(t)$	$\tilde{\beta}-\alpha\cdot\beta(t)$	$\tilde{\beta}-\alpha\cdot\beta(t)$
(3)	-	-	$1-\alpha$
(4)	$C^x_{t+1}-\alpha I(t)-\tilde{\beta}$	-	
	C^x_{t+1}	$\alpha I(s-k)+\tilde{\beta}$	$\alpha I(t+n-k)+\tilde{\beta}+1$

Il y a donc bien équivalence des flux générés, et la propriété b) en résulte, compte tenu de la parité du prix standard y à l'émission. ■

REMARQUES

1) La marge additive $\beta(\alpha,t)$ à l'instant t, pour un titre émis au pair, et possédant une marge multiplicative α, est reliée à la marge $\beta(t)$ d'un titre à marge multiplicative unitaire, par la relation:

$$\beta(\alpha,t) = \frac{(1-\alpha)\cdot(1-P(t,n))}{A(t,n)} + \alpha\cdot\beta(t). \tag{7.6}$$

Cette relation permet de se limiter à l'aide de la marge $\beta(t)$, à des titres à marge multiplicative unitaire.

La relation (7.6) est un corollaire direct de la formule de prix (7.5), compte tenu de la parité $P^x(t) = 1$ du titre.

2) La formule (7.5) peut également être obtenue d'une manière analogue pour les obligations à taux variables ($k > 1$).

Chapitre 3
Les options

1 Introduction

Figurant parmi les objets fétiches de la finance moderne, les options ont à la fois suscité un nombre considérable d'études théoriques et connu un développement prodigieux sur certains marchés financiers, au point d'y dépasser en volume les transactions sur les titres classiques. Les deux principales caractéristiques des options, qui en conditionnent la modélisation, sont:

- la nature stochastique intrinsèque: si les actions ou les obligations peuvent être envisagées dans un univers déterministe avec prévision parfaite du futur, les options, en tant que titre financier, n'ont de sens qu'en univers aléatoire;
- l'existence d'un actif sous-jacent: par construction, les options constituent des titres conditionnels, dont l'existence et la valeur sont liées à l'évolution d'un actif sous-jacent; ce dernier peut être de nature très diverse, mais doit présenter un caractère incertain quant à son évolution future; on parle ainsi d'options sur actions, sur obligations, sur taux d'intérêt, sur devises,...

Toute modélisation en matière d'options reposera donc au préalable et fondamentalement, sur le choix d'une modélisation stochastique adéquate de l'actif sous-jacent.

Après avoir, à la section 2, introduit les principales définitions et présenté,

à la section 3, quelques propriétés générales élémentaires des options, nous présenterons, à la section 4, les modèles d'évaluation d'option sur actions; nous étudierons notamment de manière approfondie le célèbre modèle de Black et Scholes. Dans un même ordre d'idées, la section 5 sera consacrée aux modèles d'évaluation d'option sur obligations. Dans les deux cas, nous nous appuierons naturellement sur les modèles stochastiques d'actions et d'obligations développés dans les deux premiers chapitres.

Nous présenterons à la section 6 un modèle général de tarification des droits conditionnels, qui permettra de dégager les concepts fondamentaux de tarification des options. La section 7 sera consacrée à une application de la théorie des options en assurance-vie.

2 Définitions générales

Nous présentons ici quelques notions de base liées aux options, ainsi qu'un exemple élémentaire.

Une *option* est un contrat conférant le droit d'acheter ou de vendre une quantité spécifiée d'un actif à un prix déterminé d'avance, tout au long d'un intervalle fixé ou à une échéance fixée.

On parlera d'*option d'achat* ou d'*option de vente* selon qu'il s'agit d'acheter l'actif ou de le vendre.

On parlera d'*option américaine* lorsque l'option peut être exercée tout au long de l'intervalle fixé; lorsqu'elle ne peut être exercée qu'à une échéance fixée, on parlera d'*option européenne*.

L'actif lié au contrat d'option est généralement appelé *actif sous-jacent*; le prix auquel, suivant le cas, il peut être acheté ou vendu, et qui est fixé lors de l'émission de l'option est appelé *prix d'exercice*.

L'option implique un *droit* et non une obligation d'acheter ou de vendre, comme c'est le cas dans le contrat à terme.

Les deux parties contractantes de l'option sont l'*émetteur* de l'option et le *détenteur* de l'option, qui peut exercer le droit à charge de l'émetteur; on dit dans ce dernier cas que l'option est exercée.

EXEMPLE 3.1: OPTION SUR DEVISE

Considérons une option d'achat européenne en dollars contre des francs suisses: il s'agira d'un titre donnant le droit d'acheter un nombre fixé de dollars, à une époque future T, à un taux de change prédéterminé, K (nombre de francs suisses nécessaires pour un dollar).

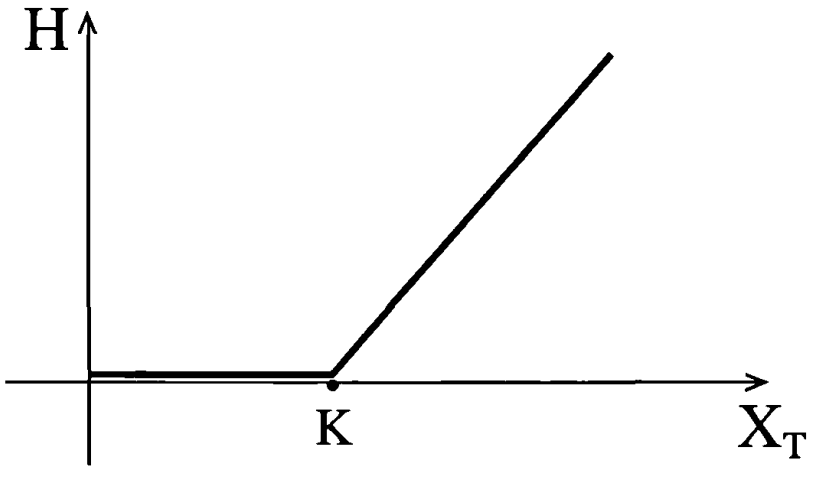
L'option pourra être exercée utilement à la date T si, à cette date, le taux de change effectif est supérieur à K: dans ce cas, le détenteur exercera son droit d'achat.

En revanche, si à la date T, le taux de change effectif est inférieur à K, le

titre d'option sera devenu sans valeur.

Si X_T dénote le taux de change effectif à la date T, alors la *valeur de l'option à la date* T est donnée par

$$H = (X_T - K)^+.$$



3 Propriétés générales

Le principal problème de la théorie des options est l'évaluation de la valeur de ces titres, notamment lors de leur émission, mais également tout au long de leur durée de vie, permettant ainsi de transformer ces titres en titres négociables sur un marché secondaire. Nous verrons que ce problème d'évaluation est évident dans deux situations:

- lorsqu'on se trouve à l'échéance de l'option;
- lorsque le titre sous-jacent connaît une évolution déterministe.

En revanche, le problème trouvera toute sa richesse, et par là même le titre d'option tout son sens, lorsque l'actif sous-jacent est de nature aléatoire.

3.1 Notations

Nous adopterons dans la suite les notations suivantes:

S = valeur de l'actif sous-jacent. Il s'agira le plus souvent d'un processus stochastique $\{S(t,\omega)|t \in [0,T], \omega \in \Omega\}$; il sera supposé non négatif;

K = prix d'exercice de l'option;
T = durée totale du contrat d'option;
τ = durée résiduelle du contrat $T - t$ (où t désigne le temps courant);
$u = 1 + r$ = taux de capitalisation au taux sans risque;
$C(S, \tau, K)$ = valeur d'une option d'achat (ou *call*) d'actif sous-jacent S, de prix d'exercice K et de durée résiduelle τ;
$P(S, \tau, K)$ = valeur d'une option de vente (ou *put*) d'actif sous-jacent S, de prix d'exercice K et de durée résiduelle τ.

Sauf mention contraire, nous supposerons dans la suite:
- que l'actif sous-jacent ne paie pas de dividende ou coupon durant la durée du contrat d'option,
- qu'il s'agit d'une option européenne.

3.2 Valeurs à l'échéance

Lorsqu'on se place à l'échéance du contrat d'option (c'est-à-dire pour un temps résiduel nul), le problème d'évaluation devient élémentaire, puisqu'il s'agit alors simplement de comparer le prix de l'actif sous-jacent directement observé au prix d'exercice proposé. On a donc de manière élémentaire:

PROPRIÉTÉ 3.1

La valeur à l'échéance d'une option d'achat ou de vente, est donnée par

$$\begin{aligned} C(S, 0, K) &= \max(0, S - K) = (S - K)^+, \\ P(S, 0, K) &= \max(0, K - S) = (K - S)^+. \end{aligned} \tag{3.1}$$

3.3 Valeurs en univers certain

Lorsque l'évolution future de l'actif sous-jacent tout au long du contrat d'option, est connu dès l'origine, le problème est faussé, le titre d'option perdant comme déjà signalé "toute saveur". Si $S(T)$ désigne la valeur connue, dès l'instant $t = 0$, de l'actif sous-jacent à l'échéance, alors la valeur de l'option sera donnée, tout au long de la vie du contrat par

$$\begin{aligned} C(S, \tau, K) &= \max(0, (S(T) - K)u^{-\tau}) \\ P(S, \tau, K) &= \max(0, (K - S(T))u^{-\tau}). \end{aligned}$$

3.4 Evaluation en univers incertain: exemple élémentaire

En vue d'introduire l'évaluation des options, en univers aléatoire, nous nous intéresserons à l'évaluation de l'option sur devise de l'exemple 3.1, dans

le cas d'un scénario élémentaire. Nous lèverons une partie du voile, puisque nous annoncerons déjà, sans le démontrer mais en le justifiant, le principe fondamental de tarification des options.

Comme précisé à l'exemple 3.1, nous noterons:

$X_T(\omega)$ = taux de change effectif des francs suisses en dollars, à l'époque future T, modélisé par une variable aléatoire;

K = taux de change prédéterminé (taux d'exercice).

La *valeur à l'échéance* de l'option d'achat est donc également une variable aléatoire:

$$H(\omega) = (X_T(\omega) - K)^+ .$$

Nous recherchons la *valeur à l'origine* de cette option. Considérons à titre d'exemple, la situation suivante:

$$\begin{aligned} X_0 &= 1{,}35 \qquad\qquad r = 0 \\ K &= 1{,}45 \\ T &= 1 \end{aligned}$$

$$X_1(\omega) = \begin{cases} 1{,}75 \text{ pour } \omega = \omega_1, \text{ avec une probabilité } \frac{1}{2} \\ 0{,}8 \text{ pour } \omega = \omega_2, \text{ avec une probabilité } \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Dans ce cas, la valeur à l'échéance de l'option est la variable aléatoire

$$H(\omega) = \begin{cases} 0{,}30 \text{ pour } \omega = \omega_1, \text{ avec une probabilité } \frac{1}{2} \\ 0 \text{ pour } \omega = \omega_2, \text{ avec une probabilité } \frac{1}{2}. \end{cases}$$

En vue de déterminer la valeur à l'origine de ce titre C, étant en présence d'une variable aléatoire, on pourrait songer à des principes classiques tels que le principe de l'espérance mathématique:

$$C = \mathbf{E}H(\omega) = 0{,}30 \cdot \frac{1}{2} = 0{,}15.$$

On pourrait également moderniser son point de vue et considérer que le prix de ce titre dépendra de l'aversion au risque de son détenteur, en utilisant la théorie de l'utilité.

Or la théorie des options nous apprend l'inexactitude de ces deux points de vue:

- le prix de l'option est unique et n'a que faire de l'aversion au risque de l'investisseur,
- le prix de l'option est indépendant de la distribution de probabilité de la valeur à l'échéance de l'actif sous-jacent.

Montrons, sans le démontrer, comment la théorie des options aborde la tarification de cette option d'achat:

a) On cherche une mesure de probabilité Q sur l'espace $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, telle que pour cette mesure, l'actif sous-jacent soit une martingale:

$$X_0 = \mathsf{E}_Q(X_1),$$

c'est-à-dire dans l'exemple considéré:

$$\begin{aligned} 1,35 &= q_1 \cdot 1,75 + (1 - q_1) \cdot 0,8 \\ q_1 &= \frac{55}{95}. \end{aligned}$$

b) On applique, pour calculer le prix de l'option, le principe de l'espérance mathématique, mais en utilisant cette mesure Q, appelée mesure-martingale:

$$C = \mathsf{E}_Q H = 0,30 \cdot \frac{55}{95} = 0,17368.$$

Comme annoncé, *ce prix est unique et indépendant de la distribution réelle de probabilité; il est basé sur une mesure dite mesure-martingale construite artificiellement.*

A l'aide d'un raisonnement de transaction, il est possible de justifier *a posteriori* ce prix.

Considérons, en effet, l'opération initiale suivante en $t = 0$, qui ne nécessite aucun investissement, et qui est censée être effectuée par l'émetteur de l'option sur devise:

- on vend l'option à un prix à fixer,
- on emprunte des francs suisses,
- à l'aide de ces deux ressources, on achète des dollars.

A l'échéance de l'option, on réalise ce portefeuille:

- on exécute la promesse d'option vis-à-vis de son détenteur,
- on rembourse le prêt en francs suisses,
- ces opérations sont financées par la revente des dollars.

En $t = 0$, la position initiale est:

option:	x	(prix inconnu)
emprunt:	z	(nombre de francs suisses empruntés)
achat:	$-1,35y$	(achat de y dollars au cours initial de 1,35)
	$V_0 = x + z - 1,35y$	

En $t = 1$, la situation du portefeuille est, selon l'état du monde:

	ω_1	ω_2
option	$-0,3$	0
emprunt	$-z$	$-z$
vente de dollars	$+1,75y$	$+0,80y$
	$V_1(\omega_1) = 1,75y - z - 0,30$	$V_1(\omega_2) = 0,8y - z$

Choisissons les quantités y et z, telles que l'opération finale ne dégage ni perte, ni gain, quel que soit l'état du monde:

$$V_1(\omega_1) = V_1(\omega_2) = 0.$$

Dans ce cas, il faudra également, par un raisonnement d'arbitrage, que $V_0 = 0$; il y aurait à défaut, selon le cas, profit ou perte certaine.

Il vient donc

$$1,75y - z - 0,30 = 0,8y - z = x + z - 1,35y = 0.$$

De deux premières conditions, on tire les valeurs de y et z:

$$\begin{aligned} y &= \frac{30}{95} \\ z &= 0,8\frac{30}{95} = \frac{24}{95}. \end{aligned}$$

La troisième condition nous livre alors la valeur de x, c'est-à-dire le prix recherché de l'option:

$$\begin{aligned} x = 1,35y - z &= 1,35\frac{30}{95} - \frac{24}{95} = 0,30\left(\frac{135}{95} - \frac{80}{95}\right) \\ &= 0,30 \cdot \frac{55}{95} = 0,17368\ , \end{aligned}$$

c'est-à-dire le prix annoncé.

Outre la détermination du prix de l'option, cette justification montre également comment peut être financée l'option, du point de vue de l'émetteur. En effet, le portefeuille W constitué de l'emprunt de z francs suisses et de l'achat de y dollars, permet de dupliquer l'option de manière parfaite, en $t = 1$. En effet, ce portefeuille vaut, selon l'état du monde:

- pour $\omega = \omega_1 : W_1(\omega_1) = 1,75y - z = 1,75 \cdot \frac{30}{95} - \frac{24}{95} = 0,30$
- pour $\omega : \omega_2 : W_1(\omega_2) = 0,8y - z = 0,8\frac{30}{95} - \frac{24}{95} = 0.$

La valeur initiale de ce portefeuille doit donc également correspondre au prix de l'option en $t = 0$:

$$W_0 = 1,35y - z = 1,35\frac{30}{95} - \frac{24}{95} = 0,17368\ .$$

On obtient donc le principe suivant de tarification, qui est également une stratégie de couverture pour l'émetteur, puisqu'elle lui permet, à l'aide d'actifs disponibles, de dupliquer exactement, quel que soit l'état du monde, les effets de l'option: *on crée un portefeuille constitué d'actifs sous-jacents qui donne*

à l'échéance le même résultat que l'option, quel que soit l'état du monde; si un tel portefeuille peut être obtenu, le prix de l'option coïncide avec la valeur initiale de ce portefeuille; l'option se trouve parfaitement dupliquée.

Ce principe pose bien sûr des problèmes d'existence de telles stratégies "dupliquantes" et d'unicité du prix induit; ces aspects seront étudiés dans un cadre théorique général à la section 6.

L'énoncé de ce principe permet d'autre part de mieux comprendre les deux sentences énoncées plus haut, qui avaient pu paraître quelque peu insolites: l'indépendance du prix de l'option vis-à-vis d'une part de l'aversion au risque de l'investisseur, d'autre part, de la distribution de probabilité de l'actif sous-jacent. En effet, malgré le caractère fortement aléatoire de l'option, déjà mentionné précédemment, *son principe de tarification est induit par une stratégie visant à se couvrir, non pas en moyenne, mais quel que soit l'état du monde:* l'aspect risqué est ainsi d'une certaine façon parfaitement contrebalancé; l'aversion au risque est donc non pertinente, et les probabilités réelles attachées à chaque état du monde n'importent pas, l'inventaire des états du monde étant suffisant.

3.5 Bornes sur les prix

Les prix des options d'achat et de vente satisfont aux inégalités suivantes.

PROPRIÉTÉ 3.2

$$\begin{aligned} \max(0, S - Ku^{-\tau}) &\leq C(S,\tau,K) \leq S \\ \max(0, Ku^{-\tau} - S) &\leq P(S,\tau,K) \leq Ku^{-\tau}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Démonstration

Nous traiterons le cas de l'option d'achat; celui de l'option de vente pouvant se démontrer d'une manière analogue.

a) $\max(0, S - K \cdot u^{-\tau}) \leq C(S,\tau,K)$.

Le caractère positif du prix résultant de la définition de l'option (droit et non obligation d'achat), il suffit de montrer que

$$C(S,\tau,K) \geq S - Ku^{-\tau} \text{ lorsque } S - K \cdot u^{-\tau} > 0.$$

Supposons par l'absurde que

$$C(S,\tau,K) < S - Ku^{-\tau} = S(T-\tau) - Ku^{-\tau}.$$

Il existe dans ce cas une constante K^* telle que

$$0 < S(T-\tau) - u^{-\tau} \cdot K - C(S,\tau,K) = u^{-\tau} \cdot K^*. \tag{3.3}$$

Montrons alors que le portefeuille suivant réalise une opportunité d'arbitrage:
- vente à découvert du titre S,
- achat de l'option C,
- achat de $(K + K^*)$ unités de titre sans risque de valeur $u^{-\tau}$.

En effet, par la relation (3.3), la situation de ce portefeuille est nulle à l'instant initial $T - \tau$.

A l'instant final T, la valeur du portefeuille devient:

	si $S(T) \leq K$	si $S(T) > K$
vente à découvert	$-S(T)$	$-S(T)$
option	0	$S(T) - K$
titre sans risque	$K + K^*$	$K + K^*$
	$K - S(T) + K^* \geq K^* > 0$	$K^* > 0$

A l'aide d'un investissement initial nul, on obtient donc, quel que soit l'état du monde, une valeur terminale strictement positive, ce qui est impossible en l'absence d'opportunité d'arbitrage.

b) $C(S, \tau, K) \leq S$.

Le droit d'acheter le titre ne peut qu'être de valeur inférieure au titre lui-même. ∎

REMARQUES

1) La borne $\max(0, S - Ku^{-\tau})$ est appelée valeur intrinsèque de l'option d'achat.

2) Lorsque $u \geq 1$ (ce qui est normalement le cas), le montant $\max(0, S - K)$, appelé valeur d'exercice de l'option d'achat, constitue également une borne inférieure.

3.6 Relation de parité entre option d'achat et option de vente

Les prix d'une option d'achat et d'une option de vente, sur le même titre sous-jacent, pour une même échéance et un même prix d'exercice, sont reliés par la relation:

PROPRIÉTÉ 3.3

$$C(S, \tau, K) + K \cdot u^{-\tau} = P(S, \tau, K) + S. \tag{3.4}$$

Démonstration

Interprétons les deux membres de l'égalité (3.4) en terme de portefeuilles et montrons qu'ils sont identiques.

a) Membre de gauche:

- Achat d'une valeur sans risque donnant K à l'échéance;
- Achat d'une option d'achat de prix d'exercice K.

La position terminale est:

- si $S(T) \leq K$: l'option d'achat est sans valeur; on reste avec le titre de valeur K;
- si $S(T) > K$: on utilise la valeur du titre sans risque, K, et on exerce l'option d'achat; la valeur du portefeuille est donc $S(T)$.
- Le portefeuille représentatif du membre de gauche permet donc d'obtenir en position terminale: $\max(S(T), K)$.

b) Membre de droite:

- Achat du titre risqué S;
- Achat d'une option de vente sur ce titre de prix d'exercice K.

La position terminale est:

- si $S(T) \leq K$: l'option de vente est exercée et on vend le titre risqué au prix K;
- si $S(T) > K$: l'option de vente est sans valeur; on reste avec le titre risqué de valeur $S(T)$.
- Le portefeuille représentatif du membre de droite permet donc d'obtenir en position terminale: $\max(S(T), K)$.

Ces deux portefeuilles permettant d'obtenir identiquement la même position terminale, leur prix initial doit être identique (ce qu'exprime la relation (3.4)), en l'absence d'opportunités d'arbitrage. ∎

3.7 Rentabilité de l'option

L'option, étant une forme de titre financier, dégage une rentabilité. Analysons le bénéfice résultant pour le détenteur, du placement en option, vu comme investissement, sur la période $[0, T]$. L'investissement initial consiste dans le paiement du prix de l'option d'achat, soit $C(S, T, K)$ (où $S = S(0)$ est la valeur initiale de l'actif sous-jacent).

Nous noterons $S^* = S(T)$ la valeur terminale de l'actif sous-jacent, *a priori* inconnue. Le bénéfice du détenteur sera fonction de cette valeur:

(i) si $S^* \leq K$: l'option n'est pas exercée, et le détenteur a perdu le prix de l'option. Le bénéfice actualisé en $t = T$ est donc

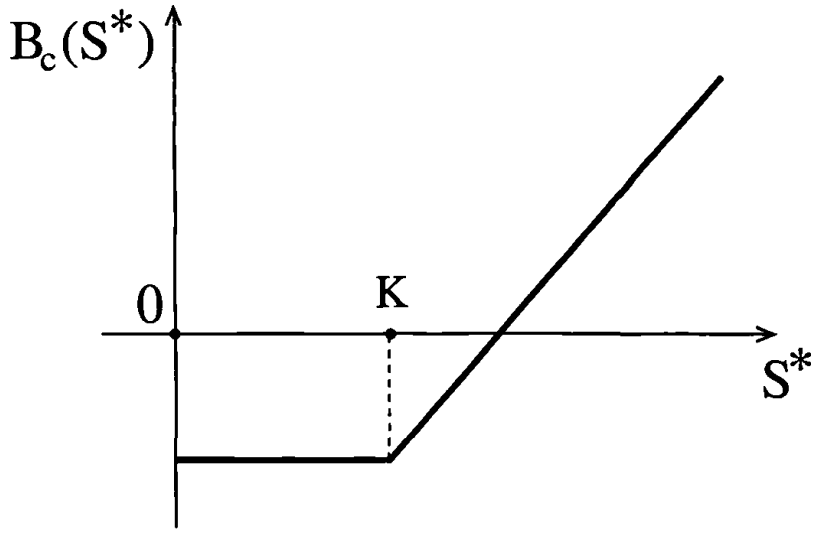
$$B_C(S^*) = -C(S, T, K) \cdot u^T;$$

(ii) si $S^* > K$: l'option est exercée; le bénéfice du détenteur résulte de la différence entre le profit retiré en T de l'option et le prix de cette option:

$$B_C(S^*) = (S^* - K) - C(S, T, K) \cdot u^T.$$

On constate que la perte est limitée au prix investi alors que le gain potentiel est illimité.

Le bénéfice peut être représenté par le graphe suivant.



De manière analogue, l'investissement dans une option de vente permet de dégager pour son détenteur, un bénéfice donné par:

si $S^* \leq K$:

$$B_p(S^*) = K - S^* - P(S,T,K) \cdot u^T;$$

si $S^* > K$:

$$B_p(S^*) = -P(S,T,K) \cdot u^T \ .$$

On peut analyser cette rentabilité, en terme de taux de rendement, au sens de la définition 1.1 du chapitre 1 (voir (3.14)). En vue de simplifier l'approche, nous supposerons que:

- $u = 1 \quad (r = 0)$
- $S(0) = K$ (le prix d'exercice coïncide avec la position initiale de l'actif sous-jacent).

Nous noterons

$$C(S,T,K) = C(\text{ avec } C < K \text{ cf (3.2)}).$$

Le taux de rendement de l'actif sous-jacent est

$$r_A(S^*) = \frac{S^* - S(0)}{S(0)} = \frac{S^* - K}{K} = \frac{S^*}{K} - 1. \tag{3.5}$$

Le taux de rendement de l'option d'achat est

- si $S^* \leq K$:

$$r_C(S^*) = \frac{0 - C}{C} = -1;$$

- si $S^* > K$:

$$r_C(S^*) = \frac{S^* - K - C}{C} = \left(\frac{S^*}{C} - 1\right) - \frac{K}{C}. \tag{3.6}$$

On constate

1) qu'il existe une valeur terminale de l'actif sous-jacent $\bar{S}^*$ telle que

$$r_C(\bar{S}^*) = r_a(\bar{S}^*).$$

Cette valeur est solution de:

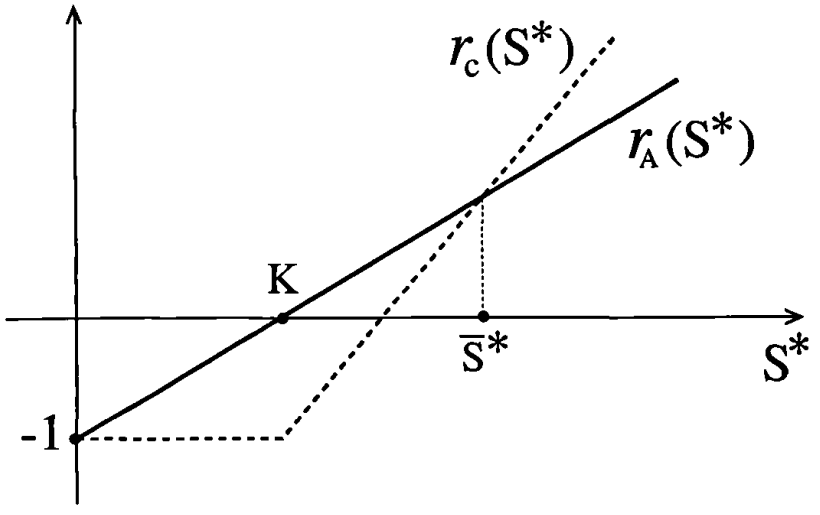
$$\frac{\bar{S}^*}{K} - 1 = \frac{\bar{S}^*}{C} - 1 - \frac{K}{C},$$

soit:

$$\bar{S}^* = \frac{K^2}{K - C} > \frac{K^2}{K} = K.$$

2) que le coefficient angulaire de la droite représentative du rendement de l'option (voir (3.6)), égal à $\frac{1}{C}$, est supérieur au coefficient angulaire de la droite représentative du rendement de l'actif sous-jacent, (voir (3.5)), égal à $\frac{1}{K}$ puisque par hypothèse $C < K$. Cette dernière propriété est généralement appelée *l'effet levier* de l'option.

Le graphe suivant représente cette situation.



3.8 Options synthétiques

Un investisseur, détenant un actif sous-jacent, peut désirer se protéger contre une baisse éventuelle. Il peut alors simultanément détenir une position sur le titre, et acheter une option de vente sur le titre: on parle alors d'*option synthétique d'achat* (qui se définit donc comme une combinaison d'une option de vente sur un titre et d'une position sur ce titre). Il s'agit d'un outil de protection de portefeuille, permettant à la fois de conserver le titre en espérant une plus-value importante, et d'être néanmoins protégé en cas de moins-value.

Analysons le bénéfice résultant d'une telle combinaison; on supposera toujours comme plus haut que $r = 0$ et $S(0) = K$; on notera P le prix initial en $t = 0$ de l'option de vente. On a:
- pour l'actif sous-jacent : $B_A(S^*) = S^* - K$;
- pour l'option de vente :

$$B_P(S^*) = \begin{cases} -P & \text{si } S^* \geq K \\ -P - (S^* - K) & \text{si } S^* < K \end{cases}$$

En sommant, il vient donc

$$B_{A+P}(S^*) = \begin{cases} S^* - K - P & \text{si } S^* \geq K \\ -P & \text{si } S^* < K \end{cases}$$

qui n'est pas sans rappeler la forme du bénéfice d'une option d'achat.

3.9 Remarques

a) Option et contrat d'assurance

Il existe une parenté évidente entre un contrat d'option et un contrat d'assurance.

Un investisseur possédant un actif sous-jacent veut se protéger contre les baisses, en souscrivant une assurance lui garantissant au minimum un montant fixé, c'est-à-dire une option de vente. Si la valeur du titre sous-jacent reste au-dessus de ce minimum, l'assurance ne joue pas; si elle passe au-dessous, l'investisseur peut vendre l'actif au minimum convenu.

En contrepartie de cette protection, l'investisseur doit payer une prime d'assurance à l'émetteur de l'option qui joue le rôle d'assureur. On remarquera qu'à l'instar d'un contrat d'assurance, le contrat d'option ne sort pas nécessairement ses effets.

b) Option et contrat à terme

Une option se distingue fondamentalement du contrat à terme dans la mesure où l'option est un droit (de vente ou d'achat) que l'on peut ou non exercer, alors que le contrat à terme, qui concerne également un engagement dans un futur incertain, implique une obligation d'achat ou de vente à un cours fixé au départ.

c) Types d'actifs sous-jacents

Les options peuvent couvrir de nombreux types d'actifs sous-jacents: ainsi parle-t-on d'option sur action, sur obligation, sur indice de taux d'intérêt, sur devises, sur contrat à terme,...

Les modèles d'évaluation d'option dépendent bien entendu de manière directe du modèle d'évaluation stochastique choisi pour l'actif sous-jacent. Ayant étudié de manière approfondie dans les deux premiers chapitres les modèles d'évaluation des actions et des obligations, nous nous attacherons naturellement, dans les deux prochaines sections, à décrire les modèles d'évaluation d'option sur actions et obligations.

4 Modèles stochastiques d'évaluation d'options sur actions

Par leur caractère volatile, les actions ont constitué un actif sous-jacent particulièrement privilégié pour les options, et ce, tant dans le développement de modèles théoriques que dans la pratique des marchés financiers.

Comme déjà précisé, un modèle d'évaluation d'option est directement engendré par le modèle d'évolution de l'actif sous-jacent utilisé. S'agissant ici d'actions, nous utiliserons d'une part un modèle discret, le modèle binomial (chapitre 1, paragraphe 4.1), d'autre part un modèle continu, le modèle brownien géométrique (chapitre 1, paragraphe 4.4). Cette dernière modélisation permettra d'obtenir la célèbre formule de Black et Scholes.

4.1 Modèle binomial

Le modèle binomial d'option sur action, développé par Cox, Ross et Rubinstein (1979), est basé sur les hypothèses suivantes.

(i) L'actif sous-jacent obéit au modèle binomial, présenté au paragraphe 4.1 du chapitre 1.

(ii) On s'intéresse à une option de type européenne.

(iii) On suppose qu'il existe un titre non risqué de rendement déterministe r par période.

(iv) Le marché est supposé parfait (voir chapitre 1, paragraphe 5.1).

On s'intéresse dans un premier temps au problème de l'évaluation du prix d'une option d'achat sur une seule période de temps. On notera K le prix d'exercice de l'option. Conformément au schéma binomial, le titre sous-jacent évolue ainsi:

$$\begin{array}{lll} t=0 & & t=1 \\ & & u \cdot S \ (u \geq 1) \text{ avec une probabilité } q \\ S = S(0) & \nearrow & \\ & \searrow & \\ & & d \cdot S \ (d \leq 1) \text{ avec une probabilité } 1-q. \end{array}$$

En notant $C(0)$ le prix de l'option d'achat ou *call* en $t = 0$, le titre d'option évolue également selon un schéma binomial, les valeurs en $t = 1$ étant des valeurs à l'échéance, puisqu'on s'intéresse au modèle sur une période:

$$\begin{array}{lll} t=0 & & t=1 \\ & & C_u = \max(0, u \cdot S - k) \\ C(0) & \nearrow & \\ & \searrow & \\ & & C_d = \max(0, d \cdot S - k). \end{array}$$

Les valeurs de C_u et C_d sont connues; il reste à déterminer la valeur initiale $C(0)$ de l'option. Pour ce:

a) on constitue un portefeuille qui duplique exactement l'option en $t = 1$;

b) par un raisonnement d'arbitrage, le prix initial $C(0)$ de l'option devra alors être égal à la valeur de ce portefeuille en $t = 0$.

Disposant sur le marché, d'une part, de l'action sous-jacente, d'autre part, du titre sans risque, un portefeuille sera constitué de x_1 titres sous-jacents et de x_2 titres sans risque de valeur initiale supposée unitaire. La valeur de ce portefeuille suit donc à nouveau un schéma binomial:

$$\begin{array}{ll} t = 0 & t = 1 \\ & x_1 \cdot uS + x_2 \cdot (1+r) \\ x_1 \cdot S + x_2 \quad \diagup\!\!\diagdown & \\ & x_1 \cdot dS + x_2 \cdot (1+r). \end{array}$$

En vue de dupliquer l'option, fixons x_1 et x_2 tels que

$$x_1 \cdot uS + (1+r)x_2 = C_u$$

$$x_1 \cdot dS + (1+r)x_2 = C_d \, .$$

La solution de ce système est donnée par

$$x_1 = \frac{C_u - C_d}{(u-d)S}$$

$$x_2 = \frac{uC_d - dC_u}{(1+r)(u-d)} \, .$$

Le prix initial de l'option est donc

$$\begin{aligned} C(0) &= x_1 \cdot S + x_2 \\ &= \frac{C_u - C_d}{(u-d)S} \cdot S + \frac{uC_d - dC_u}{(1+r)(u-d)} \\ &= \frac{1}{1+r} \cdot \left[C_u \cdot \frac{1+r-d}{u-d} + C_d \cdot \frac{u-(1+r)}{u-d} \right] . \end{aligned}$$

En posant $p = \dfrac{1+r-d}{u-d}$, que nous appellerons probabilité neutre, il vient

$$C(0) = \frac{1}{1+r} \cdot [p \cdot C_u + (1-p)C_d] \, . \tag{4.1}$$

Cette formule admet l'interprétation probabiliste simple suivante: ***le prix de l'option est l'espérance mathématique actualisée de ses valeurs à l'échéance, sous une mesure de probabilité modifiée.***

On notera l'indépendance de ce prix vis-à-vis de la distribution réelle de probabilité de l'action sous-jacente.

Justifions à présent la dénomination de probabilité neutre, pour le paramètre p.

a) $0 \leq p \leq 1$: ceci résulte de la relation d'équilibre financier sur le marché

$$d \leq 1 + r \leq u$$

(le titre sans risque ne peut être systématiquement meilleur (ou moins bon) que le titre risqué).

b) La notion de neutralité est illustrée par la propriété suivante: cherchons la probabilité q^*, telle que l'espérance mathématique correspondante du rendement de l'action sous-jacente soit égale au rendement du titre non risqué:

$$q^* \cdot \frac{uS - S}{S} + (1 - q^*) \cdot \frac{dS - S}{S} = r,$$

ou

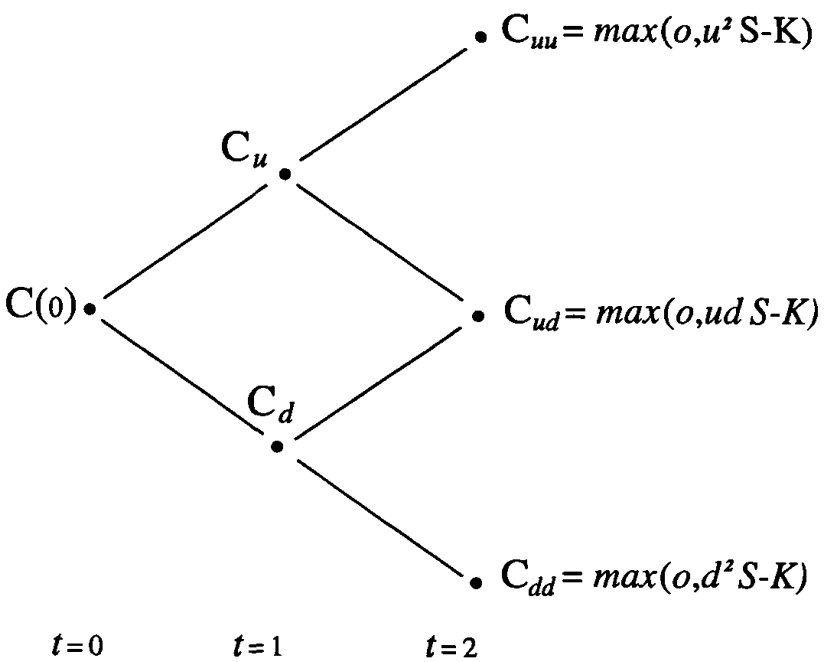
$$q^*(u - 1) + (1 - q^*)(d - 1) = r,$$

ou

$$q^*(u - d) = 1 + r - d.$$

donc $q^* = \dfrac{1 + r - d}{u - d}$, c'est-à-dire le paramètre p. Le paramètre p est donc une probabilité dans un contexte de neutralité au risque: sous la mesure correspondante, les titres avec et sans risque ont le même rendement moyen.

Développons le même modèle sur deux périodes de temps. La valeur de l'option d'achat suit dans ce cas le treillis binomial suivant:



Les valeurs connues sont les valeurs à l'échéance en $t = 2$. A l'instar des méthodes utilisées en programmation dynamique, on détermine d'abord les valeurs intermédiaires en $t = 1$, grâce à l'application de la formule (4.1) entre $t = 1$ et $t = 2$; une fois déterminées ainsi les valeurs de C_u et C_d, on applique une nouvelle fois la formule (4.1) pour obtenir le prix initial.

Il vient successivement:

$$C_u = \frac{1}{1+r}(p \cdot C_{uu} + (1-p)C_{ud})$$

$$C_d = \frac{1}{1+r}(p \cdot C_{ud} + (1-p)C_{dd})$$

$$\begin{aligned} C(0) &= \frac{1}{1+r}(p \cdot C_u + (1-p) \cdot C_d) \\ &= \frac{1}{(1+r)^2}\left[p^2 \cdot C_{uu} + 2p(1-p)C_{ud} + (1-p)^2 C_{dd}\right] . \end{aligned} \tag{4.2}$$

Le prix est à nouveau égal à l'espérance mathématique actualisée des valeurs à l'échéance, sous une distribution binomiale de paramètre p.

On peut généraliser sans peine le modèle à n périodes; il vient:

$$C(0) = \frac{1}{(1+r)^n}\left[\sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{j!(n-j)!} p^j (1-p)^{n-j} \max(0; u^j d^{n-j} \cdot S - K)\right]. \tag{4.3}$$

L'indice j représente dans cette formule le nombre de fois où le titre sous-jacent a monté.

Cette dernière formule peut se mettre sous une autre forme, faisant apparaître la fonction de répartition de la loi binomiale. Notons pour ce:

a) $\Phi(x; n, p) = P(Bin(n,p) \geq x)$ où $Bin(n,p)$ suit une loi binomiale de paramètre n et p:

$$\Phi(x; n, p) = \sum_{j=x}^{n} \frac{n!}{j!(n-j)!} p^j (1-p)^{n-j};$$

b) $q = \min\{k \in \mathbb{N} | u^k \cdot d^{n-k} S > K\}$.

La formule (4.3) devient alors

$$\begin{aligned} C(0) &= \frac{1}{(1+r)^n} \sum_{j=a}^{n} \frac{n!}{j!(n-j)!} p^j (1-p)^{n-j} \cdot (u^j d^{n-j} S - K) \\ &= \frac{1}{(1+r)^n} \sum_{j=a}^{n} \frac{n!}{j!(n-j)!} p^j (1-p)^{n-j} u^j \cdot d^{n-j} S \\ &\quad -K \cdot \frac{1}{(1+r)^n} \sum_{j=a}^{n} \frac{n!}{j!(n-j)!} \cdot p^j (1-p)^{n-j} \\ &= I - II . \end{aligned}$$

Calculons successivement I et II.

$$\begin{aligned} I &= S \cdot \sum_{j=a}^{n} \frac{n!}{j!(n-j)!} \frac{p^j}{(1+r)^j} \cdot \frac{(1-p)^{n-j}}{(1+r)^{n-j}} \cdot u^j d^{n-j} \\ &= S \cdot \sum_{j=a}^{n} \frac{n!}{j!(n-j)!} \left(\frac{pu}{1+r}\right)^j \cdot \left(\frac{(1-p)d}{1+r}\right)^{n-j} . \end{aligned}$$

En notant $p_1 = \dfrac{pu}{1+r}$ et $p_2 = \dfrac{(1-p)d}{1+r}$, montrons que $p_1 + p_2 = 1$:

$$\frac{p \cdot u}{1+r} + \frac{(1-p)d}{1+r} = \frac{p(u-d)+d}{1+r}$$

$$= \frac{\frac{(1+r-d)}{u-d} \cdot (u-d) + d}{1+r} = 1.$$

On peut donc écrire

$$\begin{aligned} I &= S \cdot \sum_{j=a}^{n} \frac{n!}{j!(n-j)!} p_1^j (1-p_1)^{n-j} \\ &= S \cdot \Phi(a; n, p_1). \end{aligned}$$

D'autre part, on a directement

$$II = K \cdot \frac{1}{(1+r)^n} \cdot \Phi(a; n, p).$$

Il vient donc finalement

$$C(0) = S \cdot \Phi(a; n, p_1) - K \cdot \frac{1}{(1+r)^n} \cdot \Phi(a; n, p) \tag{4.4}$$

$$= S \cdot \Phi\left(a; n, \frac{(1+r-d)u}{(1-d)(1+r)}\right) - K \cdot \frac{1}{(1+r)^n} \cdot \Phi\left(a; n, \frac{1+r-d}{(u-d)}\right).$$

La même méthodologie peut être développée pour tarifer les options de vente (ou *put*). Le prix d'une option de vente européenne, de prix d'exercice K, sur un problème à n périodes, est donné par

$$\begin{aligned} P(0) &= \frac{1}{(1+r)^n} \cdot \left(\sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{j!(n-j)!} p^j (1-p)^{n-j} \cdot \max(0, K - u^j d^{n-j} \cdot S) \right) \\ &= K \cdot \frac{1}{(1+r)^n} \cdot (1 - \Phi(a; n, p)) - S(1 - \Phi(a; n, p_1)). \end{aligned} \tag{4.5}$$

4.2 Modèle de Black et Scholes

Le célèbre modèle de Black et Scholes (1973), qui est cette fois un modèle continu dans le temps, repose sur les hypothèses suivantes.

(i) L'actif sous-jacent obéit au modèle brownien géométrique, présenté au paragraphe 4.4 (chapitre 1); on suppose en particulier qu'il n'y a pas de dividendes durant la vie de l'option.

(ii) On s'intéresse à une option de type européenne.

(iii) On suppose qu'il existe un titre non risqué de rendement instantané constant r.

(iv) Le marché est supposé parfait (voir chapitre 1, paragraphe 5.1).

4.2.1 Equation de structure

Obtenons dans un premier temps une équation de structure du prix de l'option d'achat européenne. On introduit pour ce les notations suivantes:

T = durée totale du contrat d'option;

t = temps courant ($0 \leq t \leq T$);

$\tau = T - t$ = temps résiduel;

$\{S(t,\omega); t \in [0,T], \omega \in \Omega\}$ = processus prix de l'action satisfaisant à l'équation (voir (4.7), chapitre 1):

$$dS(t) = \delta \cdot S(t)dt + \sigma \cdot S(t)dw(t),$$

(w étant un mouvement brownien standard);

$\{C(S,t); t \in [0,T]\}$ = processus prix de l'option d'achat ($C(S,t)$ représente donc le prix d'une option d'achat démarrant à l'instant t, échéant à l'instant T, la valeur de l'actif sous-jacent à l'instant t étant supposée égale à S);

Le prix d'exercice de l'option, noté K, sera supposé fixé;

$\{P(S,t); t \in [0,T]\}$ = processus prix de l'option de vente.

Nous étudierons dans la suite l'option d'achat; la généralisation aux options de vente sera donnée *in fine*.

En supposant la fonction de deux variables C, continûment dérivable une fois par rapport au temps, et deux fois par rapport à la valeur du titre sous-jacent, il vient par la formule d'Ito (annexe 3):

$$\begin{aligned} dC(S,t) &= \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \delta S\frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\right)dt + \sigma S\frac{\partial C}{\partial S}dw(t) \\ &= C(S,t)\cdot[\alpha_c \cdot dt + \sigma_c \cdot dw(t)], \end{aligned}$$

où

$$\alpha_c = \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \delta \cdot S\frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\right)/C. \tag{4.6}$$

$$\sigma_c = (\sigma \cdot S\frac{\partial C}{\partial S})/C\,. \tag{4.7}$$

On applique ensuite un raisonnement d'arbitrage: on constitue un portefeuille composé de x_s titres sous-jacents et de x_c options d'achat sur ce titre.

En notant $\{Q(t); 0 \leq t \leq T\}$ l'évolution de la valeur de ce portefeuille, on a:

$$\begin{aligned} Q(t) &= x_s \cdot S(t) + x_c \cdot C(S,t) \\ dQ(t) &= Q(t)\cdot[\alpha_Q dt + \sigma_Q \cdot dw(t)], \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \alpha_Q &= [x_s S\,\delta + x_c\, C\,\alpha_c]/Q \\ \sigma_Q &= [x_s\, S\sigma + x_c\, C\sigma_c]/Q. \end{aligned}$$

Choisissons un portefeuille sans composante aléatoire, c'est-à-dire tel que $\sigma_Q \equiv 0$; il faut dans ce cas, en vue d'éviter les opportunités d'arbitrage, que son rendement instantané α_Q soit égal au taux sans risque r.

On obtient ainsi les deux conditions:

$$\sigma_Q = 0, \text{ soit : } x_s\, S\sigma + x_c\, C \cdot \sigma_c = 0$$

$$\alpha_q = r, \text{ soit : } x_s\, S\delta + x_c\, C\, \alpha_c = r \cdot Q,$$

ou

$$\begin{cases} x_s\, S\, \sigma + x_c\, C\, \sigma_c = 0 \\ x_s\, S(\delta - r) + x_c\, C\, (\alpha_c - r) = 0. \end{cases}$$

Ce système n'admet une solution non triviale que si son déterminant est nul, c'est-à-dire

$$\frac{\delta - r}{\sigma} = \frac{\alpha_c - r}{\sigma_c}. \tag{4.8}$$

Cette relation exprime l'égalité des primes de risque par unité de risque, du titre sous-jacent et de l'option d'achat sur celui-ci.

En substituant dans la relation (4.8) ainsi obtenue, α_c et σ_c, par leurs valeurs issues de (4.6) et (4.7), il vient

$$(\delta - r) \cdot \sigma S \frac{\partial C}{\partial S}/C = \sigma((\frac{\partial C}{\partial t} + \delta S \cdot \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2})/C - r),$$

ou

$$\delta S \frac{\partial C}{\partial S} - rS\frac{\partial C}{\partial S} = \frac{\partial C}{\partial t} + \delta S \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} - rC,$$

et finalement

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS\frac{\partial C}{\partial S} + \frac{\partial C}{\partial t} - rC = 0, \tag{4.9}$$

avec les conditions au bord: $C(0,t) = 0$, $C(S,T) = \max(0, S - K)$.

Le prix de l'option, vu comme fonction des deux variables réelles, est donc solution d'une équation aux dérivées partielles linéaires du second ordre. On notera que le rendement instantané moyen du titre sous-jacent, δ, n'intervient pas dans les coefficients de cette équation.

4.2.2 De l'équation de structure à l'équation de la chaleur

Montrons que par un changement de variable adéquat, l'équation de structure (4.9), peut être ramenée à l'équation classique de propagation de la chaleur.

On considère pour ce, la transformation suivante:

$$C(S,t) = e^{-r(T-t)} \cdot u(x,\tau),$$

où

$$\tau = \frac{2}{\sigma^2}(r-\frac{1}{2}\sigma^2)^2\cdot(T-t) = \frac{2}{\sigma^2}M^2(T-t), \qquad (4.10)$$

(en posant $M = r-\frac{1}{2}\sigma^2$)

$$x = \frac{2}{\sigma^2}(r-\frac{1}{2}\sigma^2)[\log S/K + (r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)] \qquad (4.11)$$

$$= \frac{2}{\sigma^2}M\cdot[\log S/K + M(T-t)].$$

Voyons ce que devient l'équation (4.9) dans l'espace des variables (τ, x, u). On a

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial C}{\partial \tau}\cdot\frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}$$

$$= -\frac{2}{\sigma^2}M^2\left(\frac{\partial C}{\partial \tau}+\frac{\partial C}{\partial x}\right);$$

$$\frac{\partial C}{\partial S} = \frac{\partial C}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial S} = \frac{2}{\sigma^2}\frac{M}{S}\cdot\frac{\partial C}{\partial x};$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = \left(\frac{2}{\sigma^2}\cdot\frac{M}{S}\right)^2\cdot\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - \frac{2}{\sigma^2}\frac{M}{S^2}\cdot\frac{\partial C}{\partial x}.$$

L'équation (4.9) devient donc

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\cdot\left[\left(\frac{2}{\sigma^2}\cdot\frac{M}{S}\right)^2\cdot\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - \frac{2}{\sigma^2}\frac{M}{S^2}\cdot\frac{\partial C}{\partial x}\right] + rS\cdot\frac{\partial C}{\partial x}\cdot\frac{2}{\sigma^2}\cdot\frac{M}{S}$$

$$-\frac{2}{\sigma^2}M^2\cdot\left(\frac{\partial C}{\partial \tau}+\frac{\partial C}{\partial x}\right) - rC = 0.$$

D'autre part $C(x,\tau) = e^{-r\tau\frac{\sigma^2}{2}\frac{1}{M^2}}\cdot u(x,\tau)$, et donc

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} = e^{-r\tau\frac{\sigma^2}{2}\cdot\frac{1}{M^2}}\cdot\frac{\partial u}{\partial \tau} - r\frac{\sigma^2}{2}\cdot\frac{1}{M^2}\cdot e^{-r\tau\frac{\sigma^2}{2}\frac{1}{M^2}}\cdot u(\tau,x)$$

$$= e^{-r\tau\frac{\sigma^2}{2}\cdot\frac{1}{M^2}}\cdot\frac{\partial u}{\partial \tau} - r\frac{\sigma^2}{2}\cdot\frac{1}{M^2}\cdot C(x,\tau);$$

$$\frac{\partial C}{\partial x} = e^{-r\tau\frac{\sigma^2}{2}\frac{1}{M^2}}\cdot\frac{\partial u}{\partial x};$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = e^{-r\tau\frac{\sigma^2}{2}\cdot\frac{1}{M^2}}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

En substituant, il vient

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\cdot e^{-r\tau\frac{\sigma^2}{2}\frac{1}{M^2}}\cdot\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\left(\frac{2}{\sigma^2}\frac{M}{S}\right)^2 - \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{2}{\sigma^2}\cdot\frac{M}{S^2}\right]$$

$$+rS\cdot e^{-r\tau\frac{\sigma^2}{2}\frac{1}{M^2}}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{2}{\sigma^2}\frac{M}{S} - \frac{2}{\sigma^2}M^2\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\cdot e^{-r\tau\frac{\sigma^2}{2}\frac{1}{M^2}}$$

$$-\frac{2}{\sigma^2}\cdot M^2\cdot e^{-r\tau\frac{\sigma^2}{2}\frac{1}{M^2}}\cdot\frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{2}{\sigma^2}\cdot M^2\cdot r\frac{\sigma^2}{2}\cdot\frac{1}{M^2}\cdot C - rC = 0,$$

ou

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left[\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \cdot \frac{4}{\sigma^4} \cdot \frac{M^2}{S^2}\right]$$
$$+\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \left[-\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \cdot \frac{2}{\sigma^2} \cdot \frac{M}{S^2} + r \cdot S \cdot \frac{2}{\sigma^2} M \cdot \frac{1}{S} - \frac{2}{\sigma^2} M^2\right]$$
$$-\frac{\partial u}{\partial \tau} \cdot \frac{2}{\sigma^2} M^2 = 0.$$

Montrons que le coefficient du terme en $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ est nul:

$$\begin{aligned}
&-M + r\frac{2}{\sigma^2} M - \frac{2}{\sigma^2} M^2 \\
&= -(r - \frac{1}{2}\sigma^2) + r\frac{2}{\sigma^2} \cdot (r - \frac{1}{2}\sigma^2) - \frac{2}{\sigma^2} \cdot (r - \frac{1}{2}\sigma^2)^2 \\
&= -r + \frac{\sigma^2}{2} + 2\frac{r^2}{\sigma^2} - r - \frac{2}{\sigma^2} \cdot (r^2 + \frac{1}{4}\sigma^4 - r\sigma^2) \\
&= -r + \frac{\sigma^2}{2} + 2\frac{r^2}{\sigma^2} - r - \frac{2}{\sigma^2} r^2 - \frac{\sigma^2}{2} + 2r = 0.
\end{aligned}$$

L'équation se réduit donc à

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial \tau}, \tag{4.12}$$

c'est-à-dire la célèbre équation de propagation de la chaleur.

La condition au bord devient quant à elle:

$$C(S,T) = \max(0, S - K).$$

Le passage aux variables (x,τ) donne:

$$(S,T) \to (x,0),$$

avec

$$x = \frac{2}{\sigma^2}(r - \frac{1}{2}\sigma^2) \log \frac{S}{K},$$

et donc

$$S = K \cdot \exp(x \cdot \frac{\sigma^2}{2}/(r - \frac{1}{2}\sigma^2)).$$

La condition devient ainsi

$$u(x,0) = \varphi(x) = \begin{cases} K(\exp(x\frac{\sigma^2}{2}/(r - \frac{1}{2}\sigma^2)) - 1) & x \geq 0 \\ 0 & x < 0. \end{cases} \tag{4.13}$$

4.2.3 De l'équation de la chaleur à la formule de Black et Scholes

On sait (voir par exemple Godounov (1973)), que la solution de l'équation de la chaleur (4.12), soumise à la condition initiale $u(x,0) = \varphi(x)$ est donnée par l'intégrale de Poisson:

$$u(x,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{\tau}} \cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\tau}} \cdot d\xi \tag{4.14}$$

Compte tenu de la condition initiale (4.13), il vient

$$\begin{aligned} u(x,\tau) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} K \cdot \int_0^{\infty} \frac{(\exp(\xi \cdot \frac{\sigma^2}{2}/(r - \frac{1}{2}\sigma^2)) - 1)}{\sqrt{\tau}} \cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\tau}} \cdot d\xi \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} K \int_0^{\infty} \frac{e^{L\xi}}{\sqrt{\tau}} \cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\tau}} \cdot d\xi - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} K \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\tau}}}{\sqrt{\tau}} \cdot d\xi \\ &\quad \text{(en posant } L = \frac{\sigma^2}{2}/(r - \frac{1}{2}\sigma^2)) \\ &= I - II. \end{aligned}$$

Calculons explicitement successivement II et I.

a) Dans II, appliquons le changement de variable

$$\frac{-x+\xi}{2\sqrt{\tau}} = \frac{\psi}{\sqrt{2}}.$$

Il vient alors

$$\begin{aligned} II &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} K \int_{\frac{-x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} \frac{e^{-\psi^2/2}}{\sqrt{\tau}} \cdot 2\sqrt{\tau} \cdot d\psi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} K \cdot \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{-\psi^2/2} \cdot d\psi = K \cdot (1 - \Phi(-\frac{x}{\sqrt{2\tau}})) \\ &= K \cdot \Phi(\frac{x}{\sqrt{2\tau}}) \end{aligned}$$

où $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\xi^2/2} d\xi$ est la fonction de répartition d'une variable normale réduite.

En revenant aux variables originelles par (4.10) et (4.11), on a alors

$$\begin{aligned} II &= K \cdot \Phi\left(\frac{2/\sigma^2 \cdot M \cdot (\log \frac{S}{K} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t))}{\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sigma} \cdot M \cdot \sqrt{T-t}}\right) \\ &= K \cdot \Phi(d_2) \end{aligned}$$

où

$$d_2 = \frac{\log \frac{S}{K} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}. \tag{4.15}$$

b)

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} K \int_0^\infty \frac{e^{\xi \cdot \sigma^2/2(r-\sigma^2/2)}}{\sqrt{\tau}} \cdot e^{-\left(\frac{x-\xi)^2}{4\tau}\right.} \cdot d\xi \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \cdot K \cdot \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\tau}} \cdot e^{\xi(\sigma^2/2/(r-\frac{1}{2}\sigma^2))} \cdot e^{-\frac{1}{4\tau}(x^2+\xi^2-2x\xi)} \cdot d\xi \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} K \cdot \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\tau}} \cdot e^{-\frac{(\xi-R)^2}{4\tau}} \cdot e^{\frac{R^2-x^2}{4\tau}} \cdot d\xi \end{aligned}$$

(en posant $R = x + \dfrac{\tau\sigma^2}{r - \frac{\sigma^2}{2}}$)

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} K \cdot e^{\frac{R^2-x^2}{4\tau}} \cdot \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\tau}} \cdot e^{-\frac{(\xi-R)^2}{4\tau}} \cdot d\xi \\ &= K \cdot \Phi\left(\frac{R}{\sqrt{2\tau}}\right) \cdot e^{-\frac{R-x^2}{4\tau}} \text{ par analogie avec II.} \end{aligned}$$

Or

1)

$$\begin{aligned} \frac{R}{\sqrt{2\tau}} = \frac{x + \frac{\tau\sigma^2}{r-\sigma^2/2}}{\sqrt{2\tau}} &= \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{\sqrt{\tau}\sigma^2}{\sqrt{2} \cdot (r - \frac{1}{2}\sigma^2)} \\ &= d_2 + \frac{\sqrt{\tau} \cdot \sigma^2}{\sqrt{2}(r - \frac{1}{2}\sigma^2)} \end{aligned}$$

où d_2 est donné par (4.15).

D'autre part,

$$\frac{\sqrt{\tau}\sigma^2}{\sqrt{2}(r - \frac{1}{2}\sigma^2)} = \frac{\sqrt{2} \cdot (r - \frac{1}{2}\sigma^2) \cdot \sqrt{T-t} \cdot \sigma^2}{\sigma \cdot \sqrt{2} \cdot (r - \frac{1}{2}\sigma^2)} = \sigma \cdot \sqrt{T-t}.$$

Finalement

$$\begin{aligned} \frac{R}{\sqrt{2\tau}} = d_1 &= d_2 + \sigma\sqrt{T-t} \\ &= \frac{\log \frac{S}{K} + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}. \end{aligned} \tag{4.16}$$

2)

$$\begin{aligned} \frac{R^2 - x^2}{4\tau} &= \frac{1}{4\tau} \cdot \left(\left(x + \frac{\tau\sigma^2}{r - \sigma^2/2} \right)^2 - x^2 \right) \\ &= \frac{1}{4\tau} \cdot \left(\frac{\tau^2\sigma^4}{(r-\sigma^2/2)^2} + 2x \cdot \frac{\tau\sigma^2}{r - \sigma^2/2} + x^2 - x^2 \right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\tau \cdot \sigma^4}{4(r-\sigma^2/2)^2} + \frac{x\sigma^2}{2(r-\sigma^2/2)} \\
&= \frac{\frac{2}{\sigma^2} \cdot (r-\sigma^2/2)^2 \cdot (T-t) \cdot \sigma^4}{4(r-\sigma^2/2)^2} \\
&\quad + \frac{\frac{2}{\sigma^2} \cdot (r-\sigma^2/2) \cdot (\log \frac{S}{K} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)) \cdot \sigma^2}{2(r-\sigma^2/2)} \\
&= \log \frac{S}{K} + r(T-t).
\end{aligned}
$$

Donc

$$
\begin{aligned}
I &= K \cdot e^{\log S/K} \cdot e^{r(T-t)} \cdot \Phi(d_1) \\
&= S \cdot e^{r(T-t)} \cdot \Phi(d_1).
\end{aligned}
$$

Combinant les valeurs de I et II, on obtient finalement le prix de l'option d'achat, connu sous le nom de formule de Black et Scholes:

$$
\begin{aligned}
C(S,t) &= e^{-r(T-t)} \cdot u(x,\tau) \\
&= e^{-r(T-t)} \cdot (I - II) \\
&= S \cdot \Phi(d_1) - K \cdot e^{-r(T-t)} \cdot \Phi(d_2), \qquad (4.17)
\end{aligned}
$$

où d_1 et d_2 sont respectivement définis en (4.15) et (4.16) et Φ est la fonction de répartition d'une variable normale réduite.

La relation de parité (3.4) entre option d'achat et option de vente de mêmes caractéristiques, permet d'obtenir, dans ce même modèle, le prix d'une option de vente:

$$
\begin{aligned}
P(S,t) &= C(S,t) - S + e^{-r(T-t)} \cdot K \\
&= S \cdot \Phi(d_1) - K \cdot e^{-r(T-t)} \cdot \Phi(d_2) - S + e^{-r(T-t)} \cdot K \\
&= K \cdot e^{-r(T-t)} \cdot (1 - \Phi(d_2)) - S \cdot (1 - \Phi(d_1)) \\
&= K \cdot e^{-r(T-t)} \cdot \Phi(-d_2) - S \cdot \Phi(-d_1), \qquad (4.18)
\end{aligned}
$$

(par parité de la fonction Φ).

REMARQUES

1) On notera que les prix d'option (4.17) et (4.18), s'ils dépendent de la volatilité du titre sous-jacent, par l'intermédiaire du coefficient σ, sont indépendants du taux de rendement moyen δ, de l'actif sous-jacent.

2) On peut montrer sans peine que le prix de l'option d'achat est:
- une fonction non décroissante du prix de l'actif sous-jacent, S,
- une fonction non décroissante de l'horizon de l'option, $T-t$,
- une fonction non croissante du prix d'exercice K,
- une fonction non décroissante du taux sans risque r,
- une fonction non décroissante du coefficient de volatilité σ^2.

4.2.4 Approche par les mesures-martingales

Il est possible d'obtenir cette même formule de Black et Scholes, de manière beaucoup moins ardue, en appliquant un principe de neutralité au risque. Ce principe a déjà été observé dans le modèle binomial (voir formule (4.1)): le prix de l'option pouvait être obtenu par passage à l'espérance mathématique actualisée des valeurs à l'échéance, sous une mesure de probabilité modifiée, sous laquelle le rendement moyen du titre sous-jacent coïncide avec le taux sans risque.

Nous appliquerons, par analogie, ce même principe dans le modèle considéré ici, et montrerons à nouveau sa validité.

Ce principe sera démontré dans toute sa généralité au paragraphe 6.1.

Dans l'hypothèse de neutralité au risque, le titre sous-jacent se comportant en moyenne comme le titre non risqué, l'équation de comportement du titre sous-jacent sous la mesure modifiée notée Q, devient

$$dS(t) = r \cdot S(t)dt + \sigma \cdot S(t)d\tilde{w}(t),$$

où $\tilde{w}$ est un mouvement brownien standard vis-à-vis de la mesure modifiée Q.

L'actif sous-jacent est alors un processus brownien géométrique, et en supposant $S(0) = 1$, on a (voir (4.8), chapitre 1)

$$S(t,\omega) = \exp((r - \frac{\sigma^2}{2})t) \cdot \exp \sigma\tilde{w}(t,\omega) \; . \tag{4.19}$$

En particulier, $S(t)$ admet une distribution log-normale de paramètre $((r - \frac{\sigma^2}{2})t, \sigma\sqrt{t})$.

Calculons, sous la mesure Q, l'espérance mathématique suivante:

$$\bar{C}(S,t) = e^{-r(T-t)} \cdot \mathbf{E}_Q \cdot \left[(S(T) - K)^+ | S(t) = S\right] . \tag{4.20}$$

La valeur à l'échéance du titre sous-jacent, $S(T)$, compte tenu de (4.19), et de la condition $S(t) = S$, est donnée par

$$S(T,\omega) = S \cdot \exp((r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)) \cdot \exp \sigma(\tilde{w}(T,\omega) - \tilde{w}(t,\omega)),$$

et donc

$$\bar{C}(S,t) = e^{-r(T-t)} \int_K^\infty (x - K)dF^*(x),$$

où

$$\begin{aligned} F^*(x) &= P(S(T,\omega) \leq x | S(t) = S) \\ &= \Phi\left(\frac{\ell n(x/S) - (r - \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right), \end{aligned}$$

puisque la variable aléatoire $S(T)$ admet une distribution log-normale de paramètre $((r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t), \sigma\sqrt{T-t})$ (voir propriétés des variables log-normales à l'annexe 4).

Effectuons le changement de variable

$$u(x) = \frac{\ell n(x/S) - (r-\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

et posons

$$w^* = u(K) = \frac{\ell n(K/S) - (r-\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

Il vient

$$\begin{aligned} x &= S \cdot e^{u\sigma\sqrt{T-t}} \cdot e^{(r-\sigma^2/2)(T-t)} \\ \bar{C}(S,t) &= e^{-r(T-t)} \int_{w^*}^{\infty} (S \cdot e^{u\sigma\sqrt{T-t}} \cdot e^{(r-\sigma^2/2)(T-t)} - K) d\Phi(u) \\ &= e^{-r(T-t)} \cdot \left[S \cdot e^{(r-\sigma^2/2)(T-t)} \cdot \int_{w^*}^{\infty} e^{\sigma u \cdot \sqrt{T-t}} \cdot d\Phi(u) - K \int_{w^*}^{\infty} d\Phi(u) \right] \\ &= e^{-r(T-t)} \cdot (I - II) \, . \end{aligned}$$

Calculons explicitement successivement I et II:

a)

$$\begin{aligned} &\int_{w^*}^{\infty} e^{\sigma\sqrt{T-t}u} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} \cdot du \\ &= \int_{w^*}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(u-\sigma\sqrt{T-t})^2} \cdot e^{\frac{\sigma^2(T-t)}{2}} \cdot du \\ &= e^{\sigma^2(T-t)/2} \cdot (1 - \Phi(w^* - \sigma\sqrt{T-t})) \\ &= e^{\sigma^2(T-t)/2} \cdot \Phi(\sigma\sqrt{T-t} - w^*), \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} I &= S \cdot e^{(r-\sigma^2/2)(T-t)} \cdot e^{\sigma^2/2(T-t)} \cdot \Phi(\sigma\sqrt{T-t} - w^*) \\ &= S \cdot e^{r(T-t)} \cdot \Phi(\sigma\sqrt{T-t} - w^*) \, . \end{aligned}$$

b) $II = K \cdot (1 - \Phi(w^*)) = K \cdot \Phi(-w^*)$

Finalement, on a:

$$\begin{aligned} \bar{C}(S,t) &= e^{-r(T-t)} \cdot \left[S \cdot e^{r(T-t)} \cdot \Phi(\sigma\sqrt{T-t} - w^*) - K \cdot \Phi(-w^*) \right] \\ &= S \cdot \Phi(\sigma\sqrt{T-t} - w^*) - K \cdot e^{-r(T-t)} \cdot \Phi(-w^*) \, . \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} -w^* &= -\frac{\ell n(K/S) - (r-\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \\ &= \frac{\ell n(S/K) + (r-\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \\ &= d_2 \text{ (voir (4.15))} \, . \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} \sigma\sqrt{T-t} - w^* &= d_2 + \sigma\sqrt{T-t} \\ &= d_1 \text{ (voir (4.16))} . \end{aligned}$$

Donc

$$\bar{C}(S,t) = S \cdot \Phi(d_1) - K \cdot e^{-r(T-t)} \cdot \Phi(d_2),$$

c'est-à-dire la formule (4.17) de Black et Scholes, obtenue ici sans devoir résoudre d'équation aux dérivées partielles, mais en s'appuyant sur le principe de neutralité.

4.3 Extensions diverses

Le modèle classique de Black et Scholes s'appuie sur un actif sous-jacent obéissant à un modèle brownien géométrique.

Différentes généralisations de ce modèle brownien géométrique ont donné naissance à leur tour, à des modèles de tarification d'option sur action. Nous nous contenterons ici de donner deux résultats dans cette voie.

4.3.1 Modèle de Cox et Ross (1976)

Dans ce modèle vu au paragraphe 4.5.2 du chapitre 1, l'actif sous-jacent obéit à l'équation:

$$dS(t) = \delta \cdot S(t)dt + \sigma \cdot S^{\alpha/2}(t)dw(t),$$

où $0 \leq \alpha < 2$.

- On peut montrer qu'il est encore possible de constituer dans ce cadre un portefeuille d'arbitrage, et d'obtenir une formule de tarification de l'option d'achat, donnée par

$$\begin{aligned} C(S,t) = &\left(\sum_{n=0}^{\infty} g(S',n+1) \cdot G(K',n+1+\frac{1}{2-\alpha})\right) \\ &- K \cdot e^{-r(T-t)} \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} g(S',n+1+\frac{1}{2-\alpha}) \cdot G(K',n+1)\right), \end{aligned} \tag{4.21}$$

où

a) $S' = \left[\dfrac{2r \cdot e^{r(T-t)\cdot(2-\alpha)}}{\sigma^2 \cdot (2-\alpha) \cdot (e^{r(T-t)(2-\alpha)} - 1)}\right] \cdot S^{2-\alpha}$

b) $K' = \left[\dfrac{2r}{\sigma^2(2-\alpha) \cdot (e^{r(T-t)(2-\alpha)} - 1)}\right] \cdot K^{2-\alpha}$

c) $g(x,m) = \dfrac{e^{-x} \cdot x^{m-1}}{\Gamma(m)}$

d) $\Gamma(m) = \displaystyle\int_0^{\infty} y^{m-1} \cdot e^{-y} dy$ (fonction gamma)

e) $G(x,m) = \displaystyle\int_x^{\infty} g(y,m)dy.$

4.3.2 Modèle de Merton

Ce modèle, présenté au paragraphe 4.5.1 du chapitre 1, conduit à superposer dans l'équation d'évolution de l'actif sous-jacent une composante brownienne et une composante de Poisson.

Dans ce type de modèle, Merton a montré qu'en présence de cette double incertitude, il n'est pas possible en toute généralité de constituer un portefeuille d'arbitrage exempt de risque.

On peut néanmoins obtenir une formule de tarification d'option dans le cas particulier où l'amplitude des sauts de la composante de Poisson admet une distribution log-normale:

$$C(S,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda'(T-t)} \cdot (\lambda'(T-t))^n}{n!} C(S,t;\sigma_n^2, r_n), \qquad (4.22)$$

où $C(S,t;\sigma_n^2,r_n)$ est obtenu par la formule de Black et Scholes (4.17), en y substituant respectivement σ_n et r_n à σ et r, avec:

$$\begin{aligned} \sigma_n^2 &= \sigma^2 + \frac{n\ var(\log i)}{(T-t)} \\ r_n &= r - \lambda\bar{i} + \frac{n \log(1+\bar{i})}{(T-t)} \\ \lambda' &= \lambda(1+\bar{i}) \end{aligned}$$

(i étant la variable aléatoire représentant l'amplitude des sauts et $\bar{i}$ sa moyenne).

5 Modèles stochastiques d'évaluation d'options sur obligations

Plutôt que de porter sur une action, une option d'achat ou de vente peut porter sur une obligation, le terme de l'option étant bien sûr strictement inférieur à la maturité de l'obligation.

Pour évaluer le prix de telles options, certains auteurs ont utilisé directement la formule de Black et Scholes vue dans le cadre des options sur actions. Une telle approche est dangereuse, le comportement de l'actif sous-jacent, à savoir l'obligation, n'obéissant pas du tout à un processus de type brownien géométrique. En particulier, la volatilité, qui joue un rôle capital dans la tarification des options, loin d'être constante, décroît progressivement lorsque l'obligation arrive à échéance; elle est nulle à la maturité, compte tenu de la valeur de remboursement fixée (condition aux limites).

Il est donc plus judicieux d'utiliser un modèle adéquat d'obligations, tel qu'étudié au chapitre 2, et de tenter ensuite de tarifer une option sur un tel titre.

Développons ici, à titre d'exemple, le cas d'une option d'achat sur obligation zéro-coupon modélisée par le modèle d'arbitrage à une variable d'état présenté au paragraphe 5.1 du chapitre 2. Nous supposons, dans ce cadre, que la variable explicative de la gamme des taux zéro-coupon est le taux spot, censé être modélisé par une équation différentielle stochastique du type

$$dr(t) = f(t, r(t))dt + \rho(t, r(t))dw(t).$$

La gamme des prix des obligations zéro-coupon était dans ce cadre, solution de l'équation de structure (5.7) (chapitre 2):

$$\frac{\partial P}{\partial t} + (f + \rho \cdot \lambda) \cdot \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2}\rho^2 \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - rP = 0,$$

sous la condition limite $P(s, r) = 1$ (s étant la maturité du titre).

Notons dans ce cadre $\{C(t, T); t \geq 0\}$, le processus décrivant la valeur d'une option d'achat échéant en T, sur une obligation zéro-coupon de maturité s ($s > T$). Comme le prix des obligations, le prix de l'option est supposé déterminé par l'évolution du taux spot:

$$C(t, T, \omega) = C(t, T, r(t, \omega)).$$

La même méthodologie que celle utilisée au paragraphe 5.1 du chapitre 2 conduit alors à l'équation de structure

$$\frac{\partial C}{\partial t} + (f + \lambda^* \cdot \rho) \cdot \frac{\partial C}{\partial r} + \frac{1}{2}\rho^2 \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial r^2} - rC = 0, \tag{5.1}$$

où $\lambda^*(t, r)$ est le prix du risque du marché pour les options, défini de manière analogue à (5.6) (chapitre 2).

La condition limite est ici différente de celle des obligations; elle correspond à la valeur à l'échéance de l'option, et dépend donc de la valeur de l'obligation sous-jacente:

$$C(T, T, r) = \max(0, P(T, r) - K).$$

Ce problème n'admet généralement pas de solution analytique explicite, mais peut être résolu par des méthodes numériques (voir par exemple Courtadon 1982).

6 Modèle général de tarification des actifs conditionnels

L'exemple élémentaire de tarification d'option présenté au paragraphe 3.5 a conduit à énoncer un principe d'espérance mathématique sous une mesure de probabilité modifiée, appelée mesure-martingale ou mesure neutre au risque.

Ce principe s'est trouvé également validé, tant dans le modèle binomial développé au paragraphe 4.1, (voir relation (4.1)), que dans le modèle de Black et Scholes (voir relation (4.20)).

Cette section est consacrée à la justification théorique de ce principe qui, en réalité, est un principe général de tarification d'actifs conditionnels en l'absence d'opportunités d'arbitrage. Nous développerons en ce sens un modèle discret, présenté par Harrison-Pliska (1981), et illustrerons ce modèle par divers exemples élémentaires. Ce modèle admet également une extension continue, basée sur les mêmes principes; nous nous contenterons d'en citer les résultats, renvoyant à l'article d'Harrison-Pliska (1981) pour plus de détails.

6.1 Modèle discret

On s'intéresse à une économie discrète:

- l'espace des temps étant de la forme

$$\{0, 1, 2, \ldots, T\} ;$$

- l'espace de probabilité Ω est fini, de la forme:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N\}.$$

Sur cet espace, muni d'une σ-algèbre $(\Omega, \mathcal{F})$, est définie une mesure de probabilité $\mathbf{P}$, telle que:

$$\mathbf{P}(\{\omega_i\}) > 0 \qquad \forall i = 1, \ldots, N.$$

Il s'agira là de la seule contrainte imposée à cette mesure; financièrement, cette condition revient à supposer que la communauté des investisseurs opérant sur cette économie, est d'accord sur les états du monde possibles, sans nécessairement être du même avis sur la valeur à accorder aux différentes probabilités, toute mesure équivalente à la mesure $\mathbf{P}$ pouvant convenir dans les développements;

- l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ est muni d'une filtration F, c'est-à-dire d'une famille croissante de sous σ-algèbres de la σ-algèbre $\mathcal{F}$:

$$F = \{\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_T\}$$

avec

$$\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \ldots \subset \mathcal{F}_T.$$

Financièrement, cette filtration modélise l'information disponible à chaque instant pour tous les investisseurs. On notera d'autre part $\mathcal{P}_t$, la partition de l'espace Ω, engendrée par la sous σ-algèbre $\mathcal{F}_t$.

Dans cet environnement aléatoire ainsi défini, on suppose qu'il existe K titres risqués et un titre non risqué, modélisés par le processus vectoriel stochastique

$$\{S^j(t, \omega); j = 0, 1, \ldots, K; t = 0, 1, \ldots, T; \omega \in \Omega\},$$

supposé adapté à la filtration F (c'est-à-dire, la variable aléatoire $S^j(t)$ est mesurable par rapport à la σ-algèbre $\mathcal{F}_t$, $\forall j$ et $\forall t$).

On supposera de plus ce processus à valeurs strictement positives. La valeur indicée 0 représente le titre non risqué, non aléatoire, et son évolution est donnée par

$$S^0(t,\omega) = (1+r)^t = S^0(t).$$

On notera $\beta_t = \dfrac{1}{S^0(t)}$ (processus d'actualisation). Le processus vectoriel $\beta \cdot \mathbf{S}$ sera appelé processus actualisé.

DÉFINITION 3.1

Une *stratégie* sera un processus prévisible

$$\Phi = \{\phi^j(t,\omega); j = 0,1,\ldots,K; t = 0,1,\ldots,T, \omega \in \Omega\}$$

c'est-à-dire tel que la variable aléatoire $\phi^j(t)$ est mesurable par rapport à la σ-algèbre $\mathcal{F}_{t-1}$, $\forall j$ et $\forall t > 0$).

Les composantes du vecteur Φ peuvent être positives ou négatives (vente à découvert).

La variable aléatoire $\phi^j(t)$ représentera la quantité de la valeur j détenue entre les instants $t-1$ et t. Ce choix est supposé se faire, juste après connaissance des prix des titres à l'instant $t-1$.

On notera dans ce contexte:

a) $\Phi(t)\mathbf{S}(t-1) = \sum_{k=0}^{K} \phi^k(t) \cdot S^k(t-1)$;

= valeur du portefeuille après ré-allocation des actifs en $t-1$;

b) $\Phi(t)\mathbf{S}(t) = \sum_{k=0}^{K} \phi^k(t) \cdot S^k(t)$

= valeur du portefeuille après modification du prix des titres en t, mais avant ré-allocation en t;

c) $\Phi(t) \cdot \Delta\mathbf{S}(t) = \sum_{k=0}^{K} \phi^k(t) \cdot (S^k(t) - S^k(t-1))$

= modification de la valeur du portefeuille résultant du changement de valeurs des titres;

d)

$$\begin{aligned} G_t(\Phi) &= \sum_{i=1}^{t} \Phi(i) \cdot \Delta\mathbf{S}(i) \\ &= \sum_{i=1}^{t} \sum_{k=0}^{K} \phi^k(i)(S^k(i) - S^k(i-1)) \\ &= \text{gain cumulé par l'utilisation de la stratégie } \Phi. \end{aligned}$$

D'une manière générale, une stratégie peut requérir l'apport de nouveaux fonds ou la consommation d'une partie; on s'intéressera dans la suite aux stratégies ne nécessitant dans leur évolution, ni apport, ni retrait; cette notion est définie par:

DÉFINITION 3.2

Une stratégie est dite *auto-financée* ssi

$$\Phi(t) \cdot \mathrm{S}(t) = \Phi(t+1) \cdot \mathrm{S}(t) \qquad (t = 1, \ldots, T-1).$$

Cette condition exprime que la valeur du portefeuille n'est pas modifiée par la ré-allocation des actifs. Une autre façon d'exprimer cette propriété est de dire que la valeur du portefeuille ne se modifie que par la variation des valeurs des titres:

COROLLAIRE 3.1

Une stratégie est auto-financée ssi

$$\Phi(t) \cdot \mathrm{S}(t) = \Phi(1) \cdot \mathrm{S}(0) + G_t(\Phi).$$

Démonstration

$$\begin{aligned} G_t(\Phi) &= \sum_{i=1}^{T} \Phi(i) \cdot (\mathrm{S}(i) - \mathrm{S}(i-1)) \\ &= -\Phi(1) \cdot \mathrm{S}(0) + \Phi(1) \cdot \mathrm{S}(1) + \Phi(2)\mathrm{S}(2) \\ &\quad -\Phi(2) \cdot \mathrm{S}(1) + \ldots + \Phi(t-1)\mathrm{S}(t-1) - \Phi(t)\mathrm{S}(t) \\ &\quad +\Phi(t) \cdot \mathrm{S}(t) \\ &= \Phi(t) \cdot \mathrm{S}(t) - \Phi(1) \cdot \mathrm{S}(0) \end{aligned}$$

en appliquant la définition 3.2 ∎

Parmi ces stratégies auto-financées, on s'intéressera à celles générant un portefeuille positif.

DÉFINITION 3.3

Une stratégie est dite *admissible* lorsqu'elle est auto-financée, et a un processus-valeur positif. Le processus-valeur de la stratégie Φ étant défini par:

$$V_t(\Phi) = \begin{cases} \Phi(t)\mathrm{S}(t) & t = 1, \ldots, T \\ \Phi(1) \cdot \mathrm{S}(0) & t = 0. \end{cases}$$

Même si certaines composantes d'une stratégie admissible peuvent être négatives, la valeur globale au niveau du portefeuille est donc toujours positive.

Dans cet environnement financier, on définit ensuite la notion de droit conditionnel qui généralise le concept d'option.

DÉFINITION 3.4

Un *droit conditionnel* est une variable aléatoire X payable à l'instant T, de ce fait $\mathcal{F}_T$-mesurable, et supposée de plus non négative.

Exemple: option d'achat sur le titre n° 1, de prix d'exercice M:

$$X = \max(0, S^1(T) - M).$$

Parmi l'ensemble des droits conditionnels, on s'intéressera à ceux admettant une stratégie qui les duplique, à l'instar de l'exemple élémentaire du paragraphe 3.4.

DÉFINITION 3.5

Un droit conditionnel est dit *réalisable* s'il existe une stratégie admissible Φ (au sens de la définition 3.3) telle que

$$V_T(\Phi) = X \ .$$

Une telle stratégie duplique donc au terme le droit conditionnel; on peut donc penser que le prix du droit conditionnel à l'instant $t = 0$ doit coïncider avec la valeur initiale du portefeuille correspondant à cette stratégie; cette observation est à la base du système de tarification développé dans la suite. Remarquons à ce niveau que rien ne garantit *a priori* pour un droit conditionnel, l'unicité d'une stratégie "dupliquante".

En vue de développer la tarification des droits conditionnels, on introduit la notion de système de prix.

DÉFINITION 3.6

- Un *système de prix* est une application π de l'ensemble des droits conditionnels dans $\mathbf{R}^+$ telle que:
  a) $\pi(X) = 0$ ssi $X \equiv 0$
  b) $\pi(aX + bX') = a\pi(X) + b\pi(X')$ où $a, b \in \mathbf{R}^+$, X et X' étant deux droits conditionnels.
- Un système de prix est dit *consistant* avec le modèle de marché si le prix d'un droit conditionnel réalisable correspond à la valeur initiale du portefeuille dupliquant:

$$\pi(V_T(\Phi)) = V_0(\Phi) \ .$$

On introduit enfin, dans ce modèle de marché, la notion d'opportunité d'arbitrage.

DÉFINITION 3.7

Une *opportunité d'arbitrage* est une stratégie admissible Φ telle que:

$$\text{(i) } V_0(\Phi) = 0$$

$$\text{(ii) } E(V_T(\Phi)) > 0.$$

Il s'agirait d'une stratégie, ne nécessitant aucun investissement initial (condition (i)), générant un portefeuille toujours non négatif (par définition d'une stratégie admissible), et d'espérance strictement positive.

On peut alors énoncer le premier théorème fondamental de tarification.

THÉORÈME 3.1 (théorème d'existence)

Soit $\mathcal{T}$, l'espace des mesures de probabilités Q équivalentes à la mesure $\mathbf{P}$, telles que le processus actualisé $\beta \cdot \mathbf{S}$ soit une martingale sous Q (mesures dites martingales). Il existe alors une correspondance bi-univoque entre les systèmes de prix consistants et les mesures-martingales via les relations:

(i) $\pi(X) = \mathsf{E}_Q(\beta_T \cdot X)$ où X est un droit conditionnel

(ii) $Q(A) = \pi(S^0(T) \cdot 1_A)$ où $A \in \mathcal{F}$.

Démonstration

a) Montrons que (i) définit un système de prix consistant:

- (i) définit bien un prix par linéarité de l'opérateur espérance; de plus π ne sera nul que si $X \equiv 0$ puisque $Q(\{\omega_i\}) > 0, \forall i$ (la mesure Q étant équivalente à P).
- Montrons de plus que ce système de prix est consistant; on considère pour ce un droit conditionnel de la forme:

$$X = V_T(\Phi), \text{ où } \Phi \text{ est une stratégie admissible.}$$

On a

$$\begin{aligned} \beta_T V_T(\Phi) &= \beta_T \cdot \Phi(T) \cdot \mathbf{S}(T) \\ &= \beta_T \Phi(T) \cdot \mathbf{S}(T) + \sum_{i=1}^{T-1} (\Phi(i) - \Phi(i+1)) \beta_i \mathbf{S}(i)) \end{aligned}$$

(cette somme étant nulle par le caractère auto-financé de la stratégie)

$$= \sum_{i=2}^{T} \Phi(i) \cdot (\beta_i \mathbf{S}(i) - \beta_{i-1} \cdot \mathbf{S}(i-1)) + \Phi(1) \beta_1 \cdot \mathbf{S}(1),$$

et donc:

$$\begin{aligned}\pi(V_T(\Phi)) &= \mathsf{E}_Q(\beta_T V_T(\Phi)) \\ &= \mathsf{E}_Q\left(\sum_{i=2}^{T}\Phi(i)(\beta_i\cdot\mathbf{S}(i)-\beta_{i-1}\cdot\mathbf{S}(i-1))+E_Q(\Phi(1)\beta_1\mathbf{S}(1)\right).\end{aligned}$$

Le processus $\beta\cdot\mathbf{S}$ étant une martingale sous la mesure Q, et le processus Φ étant prévisible, il vient

$$\begin{aligned}&E_Q(\Phi(i)(\beta_i\mathbf{S}(i)-\beta_{i-1}\cdot\mathbf{S}(i-1))) \\ &= E_Q\left[E_{\mathcal{F}_{i-1}}(\Phi(i)(\beta_i\cdot\mathbf{S}(i)-\beta_{i-1}\cdot\mathbf{S}(i-1)))\right] \\ &= E_Q\left[\Phi(i)\cdot E_{\mathcal{F}_{i-1}}\cdot(\beta_i\mathbf{S}(i)-\beta_{i-1}\cdot\mathbf{S}(i-1))\right] \\ &= 0.\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\pi(V_T(\Phi)) &= E_Q(\Phi(1)\cdot\beta_1\cdot\mathbf{S}(1)) \\ &= \Phi(1)\cdot E_Q(\beta_1\cdot\mathbf{S}(1)) \\ &= \Phi(1)\cdot\beta_0\cdot\mathbf{S}(0)=\Phi(1)\cdot\mathbf{S}(0) \\ &= V_0(\Phi),\end{aligned}$$

et le système des prix est consistant.

b) Montrons que (ii) définit une mesure-martingale:

- (ii) définit bien une mesure de probabilité:

$$Q(\{\omega\})=\pi(S^0(T)\cdot 1_{\{\omega\}})>0,$$

puisque $S^0(T)\cdot 1_{\{\omega\}}$ n'est pas identiquement nul et π est un système de prix.

Considérons ensuite la stratégie telle que $\phi^0=1$ et $\phi^k=0$ $(k=1,\ldots,K)$ (stratégie consistant à ne détenir qu'une unité du titre sans risque). Il s'agit d'une stratégie admissible, et π étant supposé consistant:

$$V_0(\Phi)=\pi(V_T(\Phi))$$

Or $V_0(\Phi)=1$ et $V_T(\Phi)=S^0(T)=S^0(T)\cdot 1_\Omega$ et donc $1=\pi(S^0_T\cdot 1_\Omega)=Q(\Omega)$. Q est ainsi une mesure de probabilité; reste à montrer qu'il s'agit d'une mesure-martingale.

Montrons d'abord l'équivalence des relations (i) et (ii).
Si $Q(A)=\pi(S^0(T)\cdot 1_A)$, alors

$$Q(\{\omega\})=\pi(S^0(T)\cdot 1_{\{\omega\}}),$$

et

$$\begin{aligned}
\pi(X) &= \pi((S^0(T)\cdot\beta_T)\cdot X)(\text{ puisque } S^0(T)=\frac{1}{\beta_T})\\
&= \pi((S^0(T)\cdot\beta_T)\cdot(X_1\cdot 1_{\{\omega_1\}}+X_2\cdot 1_{\{\omega_2\}}\ldots+X_N\cdot 1_{\{\omega_N\}}))\\
&\quad \text{où } X_i=X(\omega_i)\\
&= X_1\cdot\beta_T\cdot\pi(S^0(T)\cdot 1_{\{\omega_1\}})+X_2\cdot\beta_T\cdot\pi(S^0(T)\cdot 1_{\{\omega_2\}})+\ldots\\
&\quad \ldots+X_N\cdot\beta_T\cdot\pi(S^0(T)\cdot 1_{\{\omega_N\}})\\
&= X_1\cdot\beta_T\cdot Q(\{\omega_1\})+X_2\cdot\beta_T\cdot Q(\{\omega_2\})+\ldots+X_N\cdot\beta_T\cdot Q(\{\omega_N\})\\
&= \mathbf{E}_Q(\beta_T\cdot X).
\end{aligned}$$

Fixons alors $k\geq 1$, et un temps $\tau\leq T$. Soit la stratégie admissible consistant à détenir une part du titre risqué k, jusqu'à l'instant τ, puis de tout investir dans le titre sans risque.

La stratégie est donnée par

$$\begin{aligned}
\phi^k(t) &= 1_{\{t\leq\tau\}}\\
\phi^i(t) &= 0 \qquad i\neq k, i\neq 0\\
\phi^0(t) &= (S^k(\tau)/S^0(\tau))\cdot 1_{\{t>\tau\}}.
\end{aligned}$$

Il s'agit bien d'une stratégie auto-financée, et on a

$$\begin{aligned}
V_0(\Phi) &= S^k(0)\\
V_T(\Phi) &= (S^k(\tau)/S^0(\tau))\cdot S^0(T)=S^0(T)\cdot\beta_\tau\cdot S^k(\tau).
\end{aligned}$$

π étant par hypothèse un prix consistant, on a

$$V_0(\Phi)=\pi(V_T(\Phi)),$$

et donc

$$S^k(0)=\pi(S^0(T)\cdot\beta_\tau\cdot S^k(\tau)),$$

ou

$$S^k(0)=E_Q(\beta_\tau\cdot S^k(\tau)),$$

par la formule d'équivalence entre (i) et (ii) démontré ci-dessus.

Il en résulte bien que le processus $\beta\cdot\mathbf{S}$ est une martingale sous la mesure Q. ∎

Avant d'obtenir un résultat d'unicité, montrons au préalable le lemme suivant.

LEMME 3.1

S'il existe une stratégie Φ^* auto-financée, mais non nécessairement admissible (son processus-valeur pouvant donc être négatif), telle que

$$\begin{aligned} V_0(\Phi^*) &= 0 \\ V_T(\Phi^*) &\geq 0 \text{ et } E(V_T(\Phi^*)) > 0, \end{aligned}$$

alors il existe une opportunité d'arbitrage.

Démonstration

- Si le processus-valeur est positif ($V(\Phi^*) \geq 0$), alors Φ^* est une stratégie admissible et constitue une opportunité d'arbitrage.
- Sinon, il existe un instant $t < T$, un ensemble $A \in \mathcal{F}_t$, et un réel négatif $a < 0$, tels que

$$\begin{aligned} \Phi^*(t)\mathbf{S}(t) &= a < 0 \text{ pour } \omega \in A \\ \Phi^*(u)\mathbf{S}(u) &\geq 0 \text{ pour } \omega \in A \text{ et } u > t. \end{aligned}$$

On définit alors une nouvelle stratégie par les relations

$$\begin{aligned} \psi(u) &= 0 \qquad (\text{pour } u \leq t) \\ \psi(u) &= 0 \qquad (\text{pour } u > t \text{ et } \omega \notin A) \\ \psi^k(u) &= \begin{cases} \phi^{*0}(u) - a/S^0(t) & k = 0 \\ \phi^{*k}(u) & k = 1, 2, \ldots, K \end{cases} \end{aligned}$$

(pour $u > t$ et $\omega \in A$).

Montrons que ψ est une stratégie admissible et constitue de plus une opportunité d'arbitrage.

a) ψ est une stratégie auto-financée.

Il suffit de montrer que $\psi(t+1) \cdot \mathbf{S}(t) = 0$ (t est le seul instant de singularité de la stratégie ψ par rapport à la stratégie Φ^*).

Pour $\omega \in A$, on a

$$\begin{aligned} \psi(t+1) \cdot \mathbf{S}(t) &= (\phi^{*0}(t+1) - a/S^0(t)) \cdot S^0(t) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{K} \phi^{*k}(t+1) S^k(t) \\ &= \Phi^*(t+1) \cdot \mathbf{S}(t) - a = \Phi^*(t) \cdot \mathbf{S}(t) - a = 0. \end{aligned}$$

b) ψ est une stratégie admissible pour $u > t$ et $\omega \in A$:

$$\begin{aligned} \psi(u) \cdot \mathbf{S}(u) &= (\phi^{*0}(u) - a/S^0(t)) \cdot S^0(u) + \sum_{k=1}^{K} \phi^{*k}(u) \cdot S^k(u) \\ &= \psi(u) \cdot \mathbf{S}(u) - a \cdot S^0(u)/S^0(t) \geq 0 \end{aligned}$$

Le processus-valeur de la stratégie ψ est donc positif.

Comme d'autre part, $V_T(\psi) > 0$ pour $\omega \in A$, il en résulte que ψ constitue une opportunité d'arbitrage. ■

On peut alors énoncer et démontrer le théorème d'unicité.

THÉORÈME 3.2

Le modèle de marché ne comprend pas d'opportunité d'arbitrage ssi l'espace des mesures-martingales $\mathcal{T}$ est non vide. Le modèle est alors dit *viable*.

Démonstration

a) Supposons l'espace des mesures-martingales $\mathcal{T}$ non vide. Par le théorème 3.1, il existe alors des systèmes de prix consistants; choisissons un tel prix π, et soit Φ une stratégie admissible telle que $V_0(\Phi) = 0$. Comme π est consistant, on a

$$\pi(V_T(\Phi)) = V_0(\Phi) = 0$$

et donc $V_T(\Phi) = 0$ puisque π est un prix. Il ne peut donc y avoir opportunité d'arbitrage.

b) Supposons qu'il n'y ait pas d'opportunité d'arbitrage; on va alors construire explicitement un prix consistant, qui permettra, par le théorème 3.1, de générer une mesure-martingale. Posons

$$\begin{aligned} X^+ &= \{ \text{ droits conditionnels } X \text{ tels que } EX \geq 1\} \\ X^0 &= \{ \text{ variables aléatoires } X \text{ telles que } X = V_T(\Phi), \\ &\quad \text{où } \Phi \text{ est une stratégie auto-financée non nécessairement} \\ &\quad \text{admissible, telle que } V_0(\Phi) = 0\}. \end{aligned}$$

S'il n'y a pas d'opportunité d'arbitrage, alors par le lemme 3.1, les ensembles X^+ et X^0 sont disjoints.

Or l'ensemble X^+ est un cône convexe et fermé alors que X^0 est un sous-espace linéaire.

Par le théorème de séparation des hyperplans, il existe une fonctionnelle linéaire L telle que

$$\begin{aligned} L : \mathbf{R}^\Omega \to \mathbf{R} : \quad & L(X) = 0 \quad \forall X \in X^0 \\ & L(X) > 0 \quad \forall X \in X^+ . \end{aligned}$$

Il en résulte par linéarité que $L(1_\omega) > 0$ $(\forall \omega \in \Omega)$.

Posons alors $\pi(X) = L(X)/L(S^0(T))$. Montrons que π est un candidat-prix consistant:

(i) π est un système de prix: π est une application linéaire et n'est nul que pour un droit identiquement nul.

(ii) π est consistant avec le modèle de marché: soit Φ une stratégie admissible; on construit la stratégie associée ψ, auto-financée mais non nécessairement admissible:

$$\psi^k(t) = \begin{cases} \phi^0(t) - V_0(\Phi) & k = 0 \\ \phi^k(t) & k = 1, \ldots, K \end{cases}$$

On a: $V_0(\psi) = 0$ et $V_T(\psi) = V_T(\Phi) - V_0(\Phi) \cdot S^0(T)$.
Or $V_T(\psi) \in X^0$ et $\pi(X) = 0$ pour $X \in X^0$.
Il en résulte:

$$\begin{aligned} 0 &= \pi(V_T(\psi)) = \pi(V_T(\Phi) - V_0(\Phi) \cdot S^0(T)) \\ &= \pi(V_T(\Phi)) - V_0(\Phi) \cdot \pi(S^0(T)) \\ &= \pi(V_T(\Phi)) - V_0(\Phi). \end{aligned}$$

Donc $\pi(V_T(\Phi)) = V_0(\Phi)$ et π est consistant.

On a ainsi réussi à construire un système de prix consistant, et de ce fait une mesure-martingale par le théorème 3.1 (formule (ii)). ∎

Ce théorème entraîne le résultat annoncé d'unicité du prix pour les droits conditionnels réalisables.

COROLLAIRE 3.2

Si le modèle est viable (absence d'opportunité d'arbitrage), il existe un unique prix associé à tout droit conditionnel réalisable, et on a:

$$\pi(X) = \mathsf{E}_Q(\beta_T \cdot X) \qquad \forall Q \in \mathcal{T}.$$

Démonstration

Supposons l'existence de deux prix tels que $\pi_2(X) > \pi_1(X)$. Montrons que le portefeuille suivant Φ entraîne une opportunité d'arbitrage:

- achat du droit conditionnel au prix π_1;
- vente du droit conditionnel au prix π_2;
- achat de $(\pi_2 - \pi_1)$ unités du titre sans risque.

On a

$$\begin{aligned} V_0(\Phi) &= \pi_1(X) - \pi_2(X) + (\pi_2 - \pi_1) \cdot S^0(0) = 0 \\ V_T(\Phi) &= X - X + (\pi_2 - \pi_1) \cdot S^0(T) \\ &= (\pi_2 - \pi_1) \cdot S^0(T) > 0, \end{aligned}$$

Φ est une stratégie auto-financée et, par le lemme 3.1, entraîne l'existence d'une opportunité d'arbitrage. ∎

En l'absence d'opportunité d'arbitrage, les théorèmes 3.1 et 3.2 permettent donc d'associer à tout droit conditionnel réalisable X un prix donné par:

$$\pi(X) = \mathsf{E}_Q(\beta_T X),$$

où Q est une mesure martingale.

Il reste à examiner quand un droit conditionnel donné est réalisable, afin de pouvoir lui appliquer cette formule de tarification.

Montrons au préalable la proposition suivante.

PROPOSITION 3.1

(i) Si Φ est une stratégie admissible, le processus $\beta \cdot V(\Phi)$ est une martingale pour toute mesure $Q \in \mathcal{T}$.
(ii) Si X est un droit conditionnel réalisable, alors pour toute stratégie admissible Φ générant X on a

$$\beta_t \cdot V_t(\Phi) = \mathsf{E}_Q(\beta_t \cdot X | \mathcal{F}_t).$$

Démonstration

(i) Comme Φ est une stratégie auto-financée, on a

$$\begin{aligned}
\Delta(\beta V(\Phi))_t &= \beta_t \cdot V_t(\Phi) - \beta_{t-1} \cdot V_{t-1}(\Phi) \\
&= \beta_t \cdot \Phi(t) \cdot \mathbf{S}(t) - \beta_{t-1} \cdot \Phi(t-1) \cdot \mathbf{S}(t-1) \\
&= \beta_t \cdot \Phi(t) \cdot \mathbf{S}(t) - \beta_{t-1} \cdot \Phi(t) \cdot \mathbf{S}(t-1) \\
&= \Phi(t) \cdot (\Delta \beta \mathbf{S})_t
\end{aligned}$$

Comme le processus Φ est prévisible, et le processus $\beta\mathbf{S}$ est par définition une martingale sous toute mesure $Q \in \mathcal{T}$, le résultat en résulte.
(ii) Il suffit de poser dans (i) $V_T(\Phi) = X$. ∎

COROLLAIRE 3.3

Si le droit conditionnel X est réalisable, le processus-valeur de la stratégie générant le droit, doit satisfaire la relation

$$V_t = \frac{1}{\beta_t} \cdot \mathsf{E}_Q(\beta_t \cdot X | \mathcal{F}_t).$$

On obtient ainsi une forme explicite du candidat "processus-valeur" de la stratégie générant le droit.

On introduit alors la notion de complétude du marché (propriété de représentation).

DÉFINITION 3.8

Le modèle de marché est dit *complet*, si tout droit conditionnel est réalisable.

Un marché complet et sans opportunité d'arbitrage permet donc de tarifer tout droit conditionnel de manière unique.

Dans le modèle discret présenté ci-dessus, cette propriété de complétude est liée à la dimension de l'espace, et plus précisément à une adéquation entre le nombre de titres présents, et un indice reflétant le nombre d'aléas à chaque période.

Plus précisément, introduisons les définitions suivantes.

DÉFINITION 3.9

Soit $\mathcal{T}_t$, la partition de l'espace Ω, engendrée par la filtration $\mathcal{F}_t$.

Le modèle de marché est dit contenir une *redondance* s'il existe un vecteur $\alpha \in \mathbf{R}^{K+1}$ non nul, un instant $t < T$, et un ensemble $A \in \mathcal{T}_t$ tels que

$$\mathbf{P}(\alpha \cdot \mathbf{S}(t+1) = 0 | A) = 1.$$

Il s'agit d'une relation linéaire de dépendance entre les titres.

On supposera, dans la suite, le modèle non redondant.

DÉFINITION 3.10

Si $A \in \mathcal{T}_t$, alors l'indice de *splitting* $K_t(A)$ est le nombre de cellules de la partition à l'instant suivant, soit $\mathcal{T}_{t+1}$, contenu dans l'ensemble A.

Si le marché est non redondant, on a

$$K_t(A) \geq K + 1.$$

On peut alors montrer (voir Kreps (1979)) la liaison suivante entre la complétude et cet indice.

PROPRIÉTÉ 3.4

Si le modèle est non redondant, le marché est complet ssi:

$$K_t(A) = K + 1 \qquad \forall A \in \mathcal{T}_t \ \ (t = 0, 1, \ldots, T-1). \tag{6.1}$$

Démonstration

Montrons ce résultat sur une période de temps ($T = 1$). Dans ce cas, l'indice de *splitting* est égal au cardinal N de l'espace de probabilité, puisque:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_0 &= \{\Omega\} \\ \mathcal{T}_1 &= \{\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \ldots, \{\omega_N\}\}. \end{aligned}$$

La cellule unique Ω de $\mathcal{T}_0$ se subdivise en N cellules de $\mathcal{T}_1$.

D'autre part, un droit conditionnel est un vecteur non négatif de la forme $\{X(\omega_1), \ldots, X(\omega_N)\}$. Les titres $S^0, S^1, \ldots, S^K$, sont également décrits chacun par un vecteur, la valeur k étant de la forme $\{S^k(\omega_1), S^k(\omega_2), \ldots, S^k(\omega_N)\}$.

Le problème de complétude revient à exprimer le vecteur $\mathbf{X}$ comme combinaison linéaire des $K+1$ variables (avec $K+1 \leq N$, puisque le marché est non redondant).

On obtient ainsi un système:

$$\begin{cases} X(\omega_1) = \alpha_0 \cdot S^0(\omega_1) + \alpha_1 \cdot S^1(\omega_1) + \ldots + \alpha_K S^K(\omega_1) \\ X(\omega_2) = \alpha_0 \cdot S^0(\omega_2) + \alpha_1 \cdot S^1(\omega_2) + \ldots + \alpha_K S^K(\omega_2) \\ \vdots \\ X(\omega_N) = \alpha_0 \cdot S^0(\omega_N) + \alpha_1 \cdot S^1(\omega_N) + \ldots + \alpha_K S^K(\omega_N) \end{cases}$$

Comme $K + 1 \leq N$ par non-redondance, ce système n'admet de solution générale pour tout vecteur $\mathbf{X}$ que si $K + 1 = N$. ∎

Nous illustrerons cette propriété sur quelques cas particuliers au paragraphe suivant.

Nous pouvons donc résumer ainsi les différents résultats obtenus dans le cadre de ce modèle discret.

CONCLUSION

Si l'indice de *splitting* du modèle est égal au nombre de titres sur le marché, et s'il existe au moins une mesure-martingale, alors:

(i) tout droit conditionnel est réalisable (i.e. peut être dupliqué pour une stratégie admissible);

(ii) tout droit conditionnel X admet un prix unique donné par:

$$\pi(X) = \mathsf{E}_Q(\beta_T \cdot X), \tag{6.2}$$

où Q est une mesure-martingale.

Si la propriété (ii) permet la tarification des droits conditionnels, la propriété (i) a également son importance financière puisqu'elle assure pour l'émetteur du droit conditionnel, une statégie "dupliquante" de couverture.

6.2 Exemples

EXEMPLE 1: MODÈLE BINOMIAL SUR UNE PÉRIODE

Considérons le modèle binomial sur une période:
titre non risqué :

$$S^0(0) = 1 \qquad S^0(1) = 1 + r,$$

titre risqué :

$$S^1(0) = 1 \quad S^1(1) = \begin{cases} u & (\omega = \omega_1) \\ v & (\omega = \omega_2). \end{cases}$$

avec comme contrainte: $0 < v < 1 + r < u$.

On s'intéresse à la tarification d'une option d'achat sur le titre risqué, de prix d'exercice c avec $v < c < u$.

a) *Recherche d'une mesure-martingale*

On cherche une mesure Q sur l'espace Ω, telle que

$$\mathbf{E}_Q\left[\frac{1}{(1+r)} \cdot S^1(1)\right] = S^1(0) = 1.$$

En notant α (respectivement $1 - \alpha$), la probabilité sous la mesure Q attachée à l'événement ω_1 (respectivement ω_2), il vient

$$\frac{1}{1+r} \cdot [\alpha \cdot u + (1-\alpha) \cdot v] = 1,$$

c'est-à-dire:

$$\alpha = \frac{(1+r) - v}{u - v}$$

$$1 - \alpha = 1 - \frac{1+r-v}{u-v} = \frac{u - (r+1)}{u - v}.$$

b) *Tarification de l'option d'achat*

Le droit conditionnel correspondant à l'option d'achat de prix d'exercice c peut se représenter par

$$X = (S^1(1) - c)^+.$$

Son prix sera

$$\begin{aligned} \pi(X) &= \mathbf{E}_Q\left(\frac{1}{1+r} \cdot X\right) \\ &= \frac{1}{1+r} \cdot \left[(u-c)^+ \cdot \frac{1+r-v}{u-v} + (v-c)^+ \cdot \frac{u-(r+1)}{u-v}\right] \\ &= \frac{(u-c)((1+r)-v)}{(1+r)(u-v)} \\ &\quad \text{(puisque } v < c < u\text{)}. \end{aligned}$$

c) *Stratégie dupliquante*

En notant respectivement ϕ_0 et ϕ_1, la part de la stratégie investie dans le titre non risqué et le titre risqué, on a les conditions suivantes de duplication de l'option

$$\begin{aligned} \phi_0 \cdot S^0(0) + \phi_1 S^1(0) &= \pi(X) \\ \phi_0 \cdot S^0(1) + \phi_1 \cdot S^1(1) &= X, \quad \text{(pour } \omega = \omega_1 \text{ et } \omega = \omega_2\text{)}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire le système:

$$\begin{cases} \phi_0 + \phi_1 = \dfrac{(u-c)(1+r-v)}{(1+r)(u-v)} \\ \phi_0 \cdot (1+r) + \phi_1 \cdot u = u - c \\ \phi_0 \cdot (1+r) + \phi_1 \cdot v = 0. \end{cases}$$

On peut montrer que ce système de 3 équations à seulement 2 inconnues admet néanmoins une solution unique donnée par

$$\phi_0 = -\frac{(u-c)\cdot v}{(1+r)(u-v)} \text{ et } \phi_1 = \frac{(u-c)\cdot(1+r)}{(1+r)(u-v)}.$$

On notera le signe négatif du coefficient ϕ_0 (vente à découvert du titre sans risque).

d) *Condition de splitting*

Les conditions de compatibilité sont bien remplies puisqu'il y a deux titres et deux états possibles. On peut ainsi tarifer de manière unique l'option et obtenir une stratégie de couverture.

EXEMPLE 2: MODÈLE À TROIS ÉTATS

A titre de contre-exemple, considérons le cas d'un modèle binomial sur une période, comprenant deux titres (un titre non risqué et un titre risqué), mais admettant cette fois trois états ($\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$):
- évolution du titre risqué:

$$S^1(0) = 1 \qquad S^1(1) = \begin{cases} 1+a & (\omega = \omega_1) \\ 1-a & (\omega = \omega_2) \\ 1 & (\omega = \omega_3), \end{cases}$$

avec $0 < r < a < 1$.

Le titre risqué peut donc cette fois, soit croître, soit décroître, soit se maintenir.

La condition de *splitting* (2 titres; 3 états) n'est plus remplie; montrons:

a) qu'il n'y a pas unicité des mesures-martingales;

b) que l'option d'achat n'est pas un droit réalisable;

c) que l'application de la formule de tarification à l'aide de différentes mesures-martingales conduit à des prix différents.

a) *Multiplicité des mesures martingales*

En notant respectivement α, β et $1-\alpha-\beta$ les probabilités attachées sous une mesure-martingale Q, aux événements ω_1, ω_2 et ω_3, la condition de martingale devient

$$\frac{1}{1+r} \cdot [\alpha(1+a) + \beta(1-a) + (1-\alpha-\beta)] = 1,$$

ce qui peut s'écrire:

$$\alpha = \frac{r + a \cdot \beta}{a} = \frac{r}{a} + \beta.$$

On obtient donc une famille à un paramètre de mesures-martingales données par

$$\mathcal{T} = \left\{ (\frac{r}{a} + \beta; \beta; 1 - \frac{r}{a} - 2\beta); 0 \leq \beta \leq \frac{1}{2} - \frac{r}{2a} \right\}.$$

A titre d'exemple, mettons en évidence les deux mesures-martingales particulières suivantes:

1) $\beta = 0 : Q_1 = \left(\frac{r}{a}; 0; 1 - \frac{r}{a}\right)$

2) $\beta = \frac{1}{2} - \frac{r}{2a} : Q_2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{r}{2a}; \frac{1}{2} - \frac{r}{2a}; 0\right)$.

b) *Absence de stratégie dupliquante*

Considérons à titre de droit conditionnel, une option d'achat sur le titre risqué, de prix d'exercice c; on suppose par exemple

$$1 - a < 1 < c < 1 + a.$$

La stratégie $\{\phi_0, \phi_1\}$ doit alors satisfaire aux conditions

$$\begin{cases} \phi_0 \cdot (1 + r) + \phi_1 \cdot (1 + a) = (1 + a - c) \\ \phi_0 \cdot (1 + r) + \phi_1 = 0 \\ \phi_0 \cdot (1 + r) + \phi_1 \cdot (1 - a) = 0. \end{cases}$$

Ce système n'admet pas de solutions. Le droit conditionnel n'est donc pas réalisable.

c) *Tarification*

Le droit conditionnel n'étant pas réalisable, on ne peut appliquer la formule de tarification (6.2). Montrons que l'application de cette formule, à l'aide de deux mesures-martingales Q_1 et Q_2 conduit à deux prix différents:

$$\begin{aligned} \pi_1(X) &= \mathbf{E}_{Q_1}\left[\frac{1}{1+r} \cdot (S^1(1) - c)^+\right] \\ &= \frac{1}{1+r} \cdot \frac{r}{a} \cdot (1 + a - c) \\ \pi_2(X) &= \mathbf{E}_{Q_2}\left[\frac{1}{1+r} \cdot (S^1(1) - c)^+\right] \\ &= \frac{1}{1+r}(\frac{1}{2} - \frac{r}{2a}) \cdot (1 + a - c). \end{aligned}$$

Ces deux prix diffèrent bien.

EXEMPLE 3: MODÈLE BINOMIAL GÉNÉRAL

Considérons le modèle binomial sur T périodes, avec $K+1$ titres:
- titre non risqué:

$$S^0(0) = 1 \qquad S^0(t) = (1+r)^t \qquad (t = 1, \ldots, T)$$

- titre risqué: $(k = 1, \ldots, K)$

$$S^k(0) = 1 \qquad S^k(t) = \prod_{j=1}^{t} (1 + a_j^k \cdot \chi^k(j)),$$

où:

(i) $\chi^1(1), \chi^1(2), \ldots, \chi^1(t)$, $\chi^2(1), \chi^2(2), \ldots, \chi^k(1), \ldots, \chi^k(t)$ constitue une suite de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées, prenant les valeurs 1 ou -1;

(ii) $0 < r < a^k < 1$.

Dans ce modèle, l'indice de *splitting* est de 2^K (2 possibilités à chaque instant, pour chacun des K titres). La condition de *splitting* (6.1) devient ici

$$2^K = K + 1,$$

dont la seule solution est $K = 1$ (modèle avec un seul titre risqué (voir le modèle développé au paragraphe 4.1)).

6.3 Modèle continu

Nous résumons ici la généralisation continue du modèle discret présenté au paragraphe 6.1.

La méthodologie étant identique à celle vue ci-dessus (seuls les outils de modélisation diffèrent), nous renvoyons à l'article d'Harrison-Pliska pour plus de détails et à l'annexe 5 pour les éléments théoriques utilisés (théorie des semi-martingales). L'espace des temps est cette fois un intervalle:

$$[0, T] \subset \mathbf{R}.$$

Sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, est supposée définie une filtration:

$$F = \{\mathcal{F}_t; t \in [0, T]\}.$$

Sur cet espace, on définit un processus vectoriel stochastique modélisant l'évolution de la valeur des $K+1$ titres (un titre non risqué; K titres risqués):

$$\{S^j(t, \omega); j = 0, 1, \ldots, K; t \in [0, T]; \omega \in \Omega\}$$

supposé adapté à la filtration F, et à valeurs strictement positives. De plus, les trajectoires de ces processus seront supposées continues à droite, et admettant une limite à gauche (processus dits *cad-lag*). Chacun de ces processus sera enfin une semi-martingale (voir paragraphe 4.7 du chapitre 1).

La valeur indicée 0 représente le titre non risqué; le processus correspondant sera supposé absolument continu et à variation finie.

On notera

$$S^0(t,\omega) = \exp \int_0^t r(s,\omega)ds.$$

Le processus r modélise le taux sans risque.

On notera $\beta_t = \dfrac{1}{S^0(t)}$ (facteur d'actualisation). Le processus vectoriel $\mathbf{Z} = \beta \cdot \mathbf{S}$ sera appelé *processus actualisé*, et sera également une semi-martingale vectorielle.

Sur ce marché de valeurs ainsi définies, une *stratégie* sera un processus prévisible:

$$\phi = \{\phi^j(t,\omega); j = 0,1,\ldots,K; t \in [0,T]; \omega \in \Omega\}.$$

La variable aléatoire $\phi^j(t)$ représente la quantitée de la valeur j détenue à l'instant t.

Le *processus-valeur* de la stratégie ϕ est défini par

$$V_t(\phi) = \phi(t) \cdot \mathbf{S}(t) = \sum_{k=0}^{K} \phi^k(t) S^k(t).$$

Le *processus gain cumulé* de la stratégie ϕ est défini par

$$G_t(\phi) = \int_0^t \phi(u) d\mathbf{S}(u) = \sum_{k=0}^{K} \int_0^t \phi^k(u) dS^k(u)$$

(il s'agit d'une intégrale stochastique par rapport à une semi-martingale: voir annexe 5).

Une stratégie est dite *auto-financée* si

$$V_t(\phi) = V_0(\phi) + G_t(\phi)\ .$$

On introduit également les versions actualisées des processus gain cumulé et processus-valeur:

- processus-valeur actualisé

$$V_t^*(\phi) = \beta_t \cdot V_t(\phi);$$

- processus gain actualisé

$$G_t^*(\phi) = \int_0^t \phi(u) d\mathbf{Z}(u) = \sum_{k=1}^{K} \int_0^t \phi^k(u) \cdot dZ^k(u).$$

La notion de stratégie auto-financée peut alors être exprimée en terme actualisé:

- une stratégie est auto-financée ssi

$$V_t^*(\phi) = V_0^*(\phi) + G_t^*(\phi).$$

L'espace des *mesures martingales* $\mathcal{T}$ est l'espace des mesures de probabilité Q, équivalentes à la mesure $\mathbf{P}$, telles que le processus actualisé $\mathbf{Z} = \beta \cdot \mathbf{S}$ soit une martingale sous Q.

Nous supposerons simplement ici cet espace non vide; notons $P^* \in \mathcal{T}$, une telle mesure-martingale.

Une stratégie ϕ est dite *admissible* ssi:

(i) le processus-valeur actualisé $V^*(\phi)$ est positif;

(ii) le processus ϕ est tel que les processus

$$\psi^k(t) = \int_0^t (\phi^k(s))^2 d[Z^k, Z^k]_s$$

sont localement intégrables;

(iii) la stratégie est auto-financée;

(iv) le processus $V^*(\phi)$ est une martingale sous P^*.

On notera les adaptations nécessaires de cette définition par rapport au modèle discret (voir définition 3.3) en vue de rendre la théorie consistante et d'assurer notamment l'unicité des prix.

Un *droit conditionnel* est une variable aléatoire X, payable à l'instant T, $\mathcal{F}_T$-mesurable, et supposée non négative.

Un droit conditionnel est *réalisable* s'il existe une stratégie admissible ϕ, telle que

$$V_T^*(\phi) = \beta_T \cdot X.$$

Dans ce cas, le montant $\pi = V_0^*(\phi)$ est le prix unique associé au droit conditionnel X, et on peut écrire

$$\pi(X) = \mathbf{E}_{P^*}(\beta_T X). \tag{6.3}$$

Le droit conditionnel X est dit *intégrable* si

$$\mathbf{E}_{P^*}(\beta_T X) \text{ est fini.}$$

On a alors la caractérisation suivante des droits réalisables.

PROPRIÉTÉ 3.5

Soit X un droit conditionnel intégrable et soit V^* le processus défini par la modification cad-lag de

$$V_t^* = \mathbf{E}_{P^*}(\beta_T X | \mathcal{F}_t).$$

Alors le droit X est réalisable ssi le processus V^* admet la représentation

$$\begin{aligned} V_t^* &= V_0^* + \int_0^t \mathbf{H}(s)d\mathbf{Z}(s) \\ &= V_0^* + \sum_{k=1}^{K} \int_0^t H^k(s)dZ^k(s), \end{aligned} \tag{6.4}$$

où $\mathbf{H}$ est un processus vectoriel prévisible tel que les processus

$$\left(\int_0^t (H^k(s))^2 d[Z^k, Z^k]_s\right)^{1/2}$$

soient localement intégrables ($k = 1, \ldots, K$).

Dans ce cas, $V^*(\phi) = V^*$ ainsi défini, pour toute stratégie admissible ϕ générant le droit conditionnel X.

Le modèle de marché est dit *complet* si tout droit conditionnel intégrable est réalisable.

Dans ce modèle continu, le problème de complétude est lié à une propriété de représentation de martingales (voir (6.4)), étudiée en théorie générale des processus stochastiques.

On peut montrer en particulier que les modèles continus suivants sont complets:

1. modèle brownien géométrique à une dimension (voir paragraphe 4.4 du chapitre 1); ceci justifie l'approche de neutralité au risque du modèle de Black et Scholes (paragraphe 4.2.4);
2. modèle brownien géométrique multidimensionnel (les K titres risqués sont alors chacun modélisés par un processus de type brownien géométrique);
3. modèle de Poisson à une dimension (voir paragraphe 4.2 du chapitre 1).

7 Application des options à l'assurance sur la vie

Les contrats d'assurance-vie, par les garanties de taux qu'ils octroient, que ce soit en cas de liquidation prématurée (rachat), ou d'arrivée à échéance, constituent un champ d'application évident de la théorie des options. Nous nous intéresserons dans ce cadre, et à titre d'application des principes de tarification d'option élaborés ci-dessus, à un contrat d'assurance-vie en unités de compte (ou *unit-linked*; pour plus de détails sur ces produits, voir Delvaux et Magnée (1991)).

Les capitaux de ce contrat seront donc directement liés à la valeur d'un portefeuille de référence; ce dernier peut être constitué de différents titres financiers (actions, obligations,...). L'introduction d'une option se fera par la contrainte de valeurs minimales de capital garanties par l'assureur, quelle que

soit l'évolution réelle du portefeuille de référence. Ce type de contrat, dénommé dans la littérature *equity-linked life insurance with an asset value garantee*, a été notamment étudié par Brennan et Schwartz (1976). Nous suivrons ici leur développement.

7.1 Formulation du problème

On s'intéresse à un contrat d'assurance-vie caractérisé par les prestations suivantes, payables en cas de décès prématuré avant un instant fixé T ou en cas de vie à cet instant T. Le montant $L(t)$ du capital payable au bénéficiaire à l'instant t du décès de l'assuré ($0 < t < T$), ou au terme T du contrat en cas de vie de l'assuré à cette date, est égal au maximum entre

- un montant prédéterminé $K(t)$ fixé à la souscription du contrat,
- un montant aléatoire $S(t)$ lié à la valeur-marché du portefeuille de référence:

$$L(t) = \max\{K(t); S(t)\} \qquad (0 < t \leq T).$$

La composante aléatoire S constitue pour l'assureur une opération de placement, sans risque pour lui.

Le risque pour l'assureur réside dans l'octroi de la garantie K; la prestation, peut, dans cette optique, se réécrire

$$L(t) = S(t) + \max(0, K(t) - S(t)). \tag{7.1}$$

Le problème consiste à tarifer cette garantie (prime de risque à réclamer par l'assureur pour cette couverture).

On reconnaît déjà dans cette formulation une parenté évidente avec les options de vente de prix d'exercice K.

7.2 Calcul de la prime unique

On s'intéresse au calcul de la prime unique à verser à la conclusion de ce contrat. Nous noterons:

x = âge initial de l'assuré en $t = 0$,

T = durée du contrat,

r = taux instantané d'intérêt sans risque,

$\{K(t); 0 \leq t \leq T\} \equiv$ fonction déterministe modélisant la garantie,

$\{S(t,\omega); 0 \leq t \leq T; \omega \in \Omega\} \equiv$ processus stochastique modélisant l'évolution du portefeuille de référence,

$\{X(t,\omega); 0 \leq t \leq T; \omega \in \Omega\} \equiv$ processus-valeur d'une unité monétaire investie à l'instant initial dans le portefeuille de référence ($X(0) = 1$).

On a

$$S(t,\omega) = D \cdot X(t,\omega),$$

où D est le montant unique investi, pour le compte du contrat envisagé, dans le portefeuille de référence.

En vue de tarifer le contrat, nous supposerons dans un premier temps que celui-ci expire avec certitude à la fin de l'année t.

En vertu du principe d'équivalence entre engagement de l'assureur et engagement de l'assuré, calculer la prime unique pure revient à déterminer la valeur marché de la prestation $L(t)$, à la souscription du contrat, que nous noterons:

$$V_0(L(t)) .$$

Par additivité, on a

$$V_0(L(t)) = V_0(S(t)) + V_0((K(t) - S(t))^+).$$

Il vient successivement

a) $V_0(S(t)) = V_0(D \cdot X(t)) = D$ (montant initial investi dans le portefeuille de référence).

b) La variable aléatoire $(K(t) - S(t))^+$ correspond à la valeur à l'échéance d'une option de vente sur le portefeuille de référence S, de prix d'exercice $K(t)$, et on peut noter

$$V_0((K(t) - S(t))^+) = P(D, t, K(t)),$$

où P désigne le prix d'une option de vente d'échéance t.

La prime totale à verser dans l'hypothèse d'une liquidation du contrat à la date t, est donc

$$V_0(L(t)) = D + P(D, t, K(t)) . \tag{7.2}$$

Le premier terme représente le montant investi. Le second terme représente la prime de risque correspondant à la garantie offerte.

Si l'on utilise, à titre d'exemple, la formule de tarification de Black et Scholes, c'est-à-dire si l'on suppose que l'évolution du portefeuille de référence est donnée par

$$dS(t) = S(t) \cdot \alpha \cdot dt + S(t) \cdot \sigma \cdot dw(t), \tag{7.3}$$

avec

$$S(0) = D,$$

il vient (voir (4.18)):

$$V_0(L(t)) = D + \left[K(t) \cdot e^{-rt} \cdot \Phi(-d_2) - D \cdot \Phi(-d_1)\right], \tag{7.4}$$

où

$$d_{\frac{1}{2}} = \frac{\log D/K(t) + (r \pm \frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}}$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\xi^2/2} d\xi.$$

Afin d'introduire, dans un second temps, le risque viager (i.e. introduire une distribution de l'instant t de liquidation du contrat), on pose:

${}_tp_x$ = probabilité, étant vivant à l'âge x, d'être encore en vie à l'âge $x+t$;

q_{x+t} = probabilité, étant vivant à l'âge $x+t$, de décéder entre l'âge $x+t$ et l'âge $x+t+1$;

$q_t(x)$ = probabilité d'expiration du contrat au cours de l'année t par décès
$= {}_{t-1}p_x \cdot q_{x+t-1} \qquad (t < T)$;

$q_T(x)$ = probabilité d'expiration du contrat au terme T
$= {}_{T-1}p_x$.

On a alors, en supposant les prestations payables à la fin de l'année du décès, et en notant PU, le montant recherché de la prime unique:

$$\begin{aligned} PU &= \sum_{t=1}^{T} q_t(x) \cdot V_0(L(t)) \\ &\qquad (\text{ avec } \sum_{t=1}^{T} q_t(x) = 1) \\ &= \sum_{t=1}^{T} q_t(x) \cdot [D + P(D,t,K(t))] \\ &= D \cdot \sum_{t=1}^{T} q_t(x) + \sum_{t=1}^{T} q_t(x) \cdot P(D,t,K(t)) \\ &= D + \sum_{t=1}^{T-1} {}_{t-1}p_x \cdot q_{x+t-1} \cdot P(D,t,K(t)) \\ &\quad + {}_{t-1}p_x \cdot P(D,T,K(T)) \end{aligned} \tag{7.5}$$

Le premier terme représente le montant investi. Le deuxième terme représente la prime de risque correspondant aux garanties minimales en cas de décès. Le troisième terme représente la prime de risque correspondant à la garantie minimale en cas de vie.

7.3 Propriétés

En vue d'étudier les propriétés de ce principe de calcul de prime, nous nous intéresserons au cas particulier suivant:

a) le portefeuille de référence obéit à un processus brownien géométrique (cf. (7.3)), et on utilise la formule de tarification d'option de Black et Scholes;

b) la garantie minimale est de la forme:

$$K(t) = D \cdot e^{jt}$$

(capitalisation du montant investi à un taux j, appelé taux technique, fixé de commun accord entre l'assureur et l'assuré).

La prime unique prend alors la forme

$$\begin{aligned} PU &= D + D\sum_{t=1}^{T} q_t(x) \cdot P(1,t,e^{jt}) \\ &= D + D\sum_{t=1}^{T} q_t(x) \cdot \left[e^{(j-r)t}\Phi(-d_2) - \Phi(-d_1)\right], \end{aligned} \tag{7.6}$$

où

$$\begin{aligned} d_{\frac{1}{2}} &= \frac{\log e^{-jt} + (r \pm \frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}} \\ &= \frac{(r - j \pm \frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}} \\ &= \left(\frac{r-j}{\sigma} \pm \frac{\sigma}{2}\right)\sqrt{t}. \end{aligned}$$

Le paramètre déterminant est donc la différence entre le taux r sans risque du marché et le taux technique j; en notant $i^* = j - r$, on a

$$PU = D \cdot \left[1 + \sum_{t=1}^{T} q_t(x) \cdot (e^{i^* t}\Phi((\frac{i^*}{\sigma} + \frac{\sigma}{2})\sqrt{t}) - \Phi((\frac{i^*}{\sigma} - \frac{\sigma}{2})\sqrt{t}))\right]. \tag{7.7}$$

Dans le cas particulier où $i^* = 0$ (adéquation entre le taux du marché et le taux technique), il vient

$$PU = D\left[1 + \sum_{t=1}^{T} q_t(x) \cdot (2\Phi(\sigma\sqrt{t}/2) - 1)\right].$$

Montrons que ce principe de calcul de prime hérité de la théorie des options contient en général un chargement de sécurité.

DÉFINITION 3.11

- Un *principe de calcul de prime* π est un opérateur associant à une variable aléatoire R, modélisant le risque à assurer, un nombre réel P, appelé prime:

$$\pi : R \to \pi(R) = P.$$

- Un principe de calcul de prime π contient un chargement de sécurité si

$$\pi(R) - \mathbf{E}(R) > 0.$$

PROPRIÉTÉ 3.6

Le prime unique (7.7) obtenue à partir de la formule de Black et Scholes contient un chargement de sécurité.

Démonstration

Le risque R, correspondant à l'option de vente, est donné par

$$R(\omega) = e^{-rt} \cdot \left(e^{jt} - X(t,\omega)\right)^+,$$

(valeur actuelle au taux du marché de la valeur à l'échéance de l'option de vente, en supposant la liquidation du contrat à l'instant t).

La prime relative à ce risque, découlant de la formule de Black et Scholes, est donnée par

$$\begin{aligned} \pi(R) &= P(1,t,e^{jt}) \\ &= e^{(j-r)t} \cdot \Phi\left((\frac{j-r}{\sigma} + \frac{\sigma}{2})\sqrt{t}\right) - \Phi\left((\frac{j-r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2})\sqrt{t}\right). \end{aligned} \quad (7.8)$$

D'autre part, l'espérance mathématique de la variable aléatoire R est donnée par

$$\mathsf{E}(R) = e^{-rt} \int_0^{e^{jt}} (e^{jt} - x) dF_t(x)$$

où F_t est la fonction de répartition de la variable aléatoire $X(t)$, qui admet une distribution log-normale (cf. annexe 4) de paramètres

$$\begin{aligned} a &= (\alpha - \frac{\sigma^2}{2}) \cdot t \\ b &= \sigma \cdot \sqrt{t}. \end{aligned}$$

On a donc (voir annexe 4):

$$\mathsf{E}(R) = e^{-rt} \int_0^{e^{jt}} (e^{jt} - x) \frac{1}{b\sqrt{2\pi} \cdot x} \exp - \left(\frac{(\ell nx - a)^2}{2b^2}\right) dx.$$

Considérons le changement de variable

$$y = \frac{\ell nx - a}{b} \text{ ou } x = e^{a+y \cdot b}.$$

On a alors

$$\begin{aligned} \mathsf{E}(R) &= e^{-rt} \int_{-\infty}^{\frac{jt-a}{b}} (e^{jt} - e^{a+y \cdot b}) \cdot \frac{1}{b\sqrt{2\pi x}} \cdot e^{-y^2/2} \cdot bxdy \\ &= e^{-rt} \int_{-\infty}^{\frac{jt-a}{b}} e^{jt} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-y^2/2} dy - e^{-rt} \int_{-\infty}^{\frac{jt-a}{b}} e^{a+b \cdot y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy \\ &= e^{(j-r)t} \Phi\left(\frac{jt-a}{b}\right) - I \cdot e^{a-rt}. \end{aligned}$$

Il vient successivement

a)

$$\frac{jt-a}{b} = \frac{jt - (\alpha - \frac{\sigma^2}{2})t}{\sigma\sqrt{t}} = \left(\frac{j-\alpha}{\sigma} + \frac{\sigma}{2}\right)\sqrt{t}.$$

b)

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{\frac{jt-a}{b}} e^{by} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy \\ &= \int_{-\infty}^{\frac{jt-a}{b}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{(y-b)^2}{2}} \cdot e^{b^2/2} dy \\ &= e^{b^2/2} \cdot \Phi\left(\frac{jt-a}{b} - b\right) = e^{\sigma^2 t/2} \cdot \Phi\left((\frac{j-\alpha}{\sigma} - \frac{\sigma}{2})\sqrt{t}\right). \end{aligned}$$

On a donc finalement

$$\mathsf{E}(R) = e^{(j-r)\cdot t}\Phi\left((\frac{j-\alpha}{\sigma} + \frac{\sigma}{2})\sqrt{t}\right) - e^{(\alpha-r)t} \cdot \Phi\left((\frac{j-\alpha}{\sigma} - \frac{\sigma}{2})\sqrt{t}\right). \quad (7.9)$$

Les expressions (7.8) et (7.9), respectivement de $\pi(R)$ et de $\mathsf{E}(R)$, à comparer, ont une forme analogue; $\pi(R)$ apparaît comme une particularisation de $\mathsf{E}(R)$ en y posant $\alpha = r$.

Le chargement de sécurité peut donc s'écrire, en posant $c = \alpha - r$:

$$g(c) = \pi(R) - \mathsf{E}(R) = e^{(j-r)t}\Phi\left((\frac{j-r}{\sigma} + \frac{\sigma}{2}\sqrt{t}\right) - \Phi\left((\frac{j-r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2})\sqrt{t}\right)$$

$$- \left[e^{(j-r)t} \cdot \Phi\left((\frac{j-r-c}{\sigma} + \frac{\sigma}{2})\sqrt{t}\right) - e^{ct} \cdot \Phi\left((\frac{j-r-c}{\sigma} - \frac{\sigma}{2})\sqrt{t}\right)\right]$$

Ce chargement de sécurité est bien positif compte tenu du lemme suivant, et de la contrainte $c > 0$, c'est-à-dire $\alpha > r$ (taux moyen d'un placement à risque strictement supérieur au taux sans risque du marché).

LEMME 3.2

La fonction $g(c)$ est une fonction strictement croissante, et on a:

$$\begin{aligned} g(c) &< 0 \quad \text{pour } c < 0 \\ g(c) &= 0 \quad \text{pour } c = 0 \\ g(c) &> 0 \quad \text{pour } c > 0. \end{aligned}$$

Démonstration

a) $g(0) = 0$ découle de la définition de la fonction g.
b) En dérivant la fonction g, il vient

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial c} &= t \cdot e^{ct} \cdot \Phi\left((\frac{j-r-c}{\sigma} - \frac{\sigma}{2})\sqrt{t}\right) - e^{(j-r)t}\frac{\partial}{\partial c}\Phi\left((\frac{j-r-c}{\sigma} + \frac{\sigma}{2})\sqrt{t}\right) \\ &\quad + e^{ct} \cdot \frac{\partial}{\partial c}\Phi\left((\frac{j-r-c}{\sigma} - \frac{\sigma}{2})\sqrt{t}\right) \end{aligned}$$

$$= t \cdot e^{ct}\Phi\left((\frac{j-r-c}{\sigma} - \frac{\sigma}{c})\sqrt{t}\right) + \frac{\sqrt{t}}{\sigma} \cdot e^{(j-r)t} \cdot \Phi'\left((\frac{j-\alpha}{\sigma} + \frac{\sigma}{2})\sqrt{t}\right)$$
$$-\frac{\sqrt{t}}{\sigma} \cdot e^{(\alpha-r)t}\Phi'\left((\frac{j-\alpha}{\sigma} - \frac{\sigma}{2})\sqrt{t}\right)$$
$$= I + II - III.$$

I étant positif, calculons $II - III$:

$$II - III = \frac{\sqrt{t}}{\sigma}e^{(j-r)t} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}((\frac{j-\alpha}{\sigma} + \frac{\sigma}{2})\sqrt{t})^2\right)$$
$$-\frac{\sqrt{t}}{\sigma} \cdot e^{(\alpha-r)t} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}((\frac{j-\alpha}{\sigma} - \frac{\sigma}{2})\sqrt{t})^2\right)$$
$$= \frac{\sqrt{t}}{\sigma} \cdot e^{(j-r)t}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}t(\frac{\sigma^2}{4} + (\frac{j-\alpha}{\sigma})^2 + 2 \cdot \frac{j-\alpha}{\sigma} \cdot \frac{\sigma}{2})\right)$$
$$-\frac{\sqrt{t}}{\sigma} \cdot e^{(\alpha-r)t} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}t(\frac{\sigma^2}{4} + \frac{(j-\alpha)^2}{\sigma^2} - 2\frac{j-\alpha}{\sigma} \cdot \frac{\sigma}{2})\right)$$
$$= 0 .$$

On a donc bien

$$\frac{\partial g}{\partial c} = I > 0.$$

■

REMARQUE

On peut également développer dans le même cadre des modèles de tarification de contrats à primes annuelles plutôt qu'à prime unique (voir Brennan et Schwartz (1976)).

Annexe 1
Variables aléatoires et processus stochastiques

1 Définitions générales de la théorie élémentaire des probabilités

La notion de base de la théorie des probabilités est celle d'espace de probabilité, constitué du triplet suivant:

- un ensemble Ω,
- une σ-algèbre $\mathcal{F}$ sur Ω,
- une mesure de probabilité $\mathbf{P}$ sur $\mathcal{F}$.

Définissons chacun de ces éléments.

DÉFINITION 4.1

Soit Ω un ensemble; les éléments ω de l'ensemble Ω peuvent être interprétés comme les résultats possibles d'une expérience aléatoire. Ils seront dénommés *événements élémentaires*.

DÉFINITION 4.2

Une σ-algèbre $\mathcal{F}$ sur l'ensemble Ω, est un ensemble de parties de Ω, qui con-

tient la partie vide et qui est stable pour les opérations de réunion dénombrable, d'intersection dénombrable et d'ensemble complémentaire. Les éléments de $\mathcal{F}$ seront appelés *événements*.

DÉFINITION 4.3

Une loi de probabilité $\mathbf{P}$ sur l'espace $(\Omega, \mathcal{F})$ est une mesure définie sur $\mathcal{F}$, positive, de masse totale égale à 1.

On a donc :

a) $\mathbf{P}(\Omega) = 1$

b) $\mathbf{P}(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{F}$

c) $\mathbf{P}(\bigcup_n A_n) = \sum_n \mathbf{P}(A_n)$, pour toute suite $(A_n)_{n \in N}$ d'événements disjoints.

Le nombre $\mathbf{P}(A)$ sera appelé probabilité de l'événement A ($A \in \mathcal{F}$); il s'agira d'un nombre réel compris entre 0 et 1.

DÉFINITION 4.4

Un événement $A \in \mathcal{F}$ est dit *presque sûr* si sa probabilité est égale à 1.

Un événement $A \in \mathcal{F}$ est dit $\mathbf{P}$-*négligeable* si sa probabilité est nulle.

DÉFINITION 4.5

Un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ est dit *complet* si toute partie A de Ω contenue dans un ensemble $\mathbf{P}$-négligeable appartient à la σ-algèbre des événements $\mathcal{F}$.

Sur un espace de probabilité ainsi défini, on introduit la notion de variable aléatoire qui modélise le résultat quantitatif de l'expérience aléatoire envisagée.

DÉFINITION 4.6

Une *variable aléatoire* X définie sur l'ensemble Ω à valeurs dans un espace mesurable donné $(E, \mathcal{E})$ est une fonction mesurable de Ω dans E c'est-à-dire:

$$X : \Omega \to E : \omega \to X(\omega) \in E,$$

$$\text{tel que } X^{-1}(A) \in \mathcal{F} \text{ pour } \forall A \in \mathcal{E}.$$

La *tribu* $\mathcal{F}(X)$ associée à la variable aléatoire X est la σ-algèbre sur Ω engendrée par les ensembles de la forme $\omega_B = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}$ où $B \in \mathcal{E}$.

EXEMPLES

- Variable aléatoire réelle: fonction à valeurs dans $\mathbf{R}$ (la σ-algèbre $\mathcal{E}$ étant alors la tribu de borréliens sur $\mathbf{R}, \mathcal{B}$).
- Vecteur aléatoire réel: fonction à valeurs dans $\mathbf{R}^N$.

On supposera dans la suite, sauf mention contraire, que toutes les variables aléatoires sont à valeurs dans l'ensemble $\mathbf{R}$ ou dans un sous-ensemble fini ou non de $\mathbf{R}$.

DÉFINITION 4.7

Une variable aléatoire X est dite *discrète* si elle prend ses valeurs sur un ensemble dénombrable (par exemple $\mathbf{N}$ ou $\mathbf{N}^+$).

La loi de probabilité définie sur l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ induit sur la variable aléatoire X, une loi.

DÉFINITION 4.8

La *loi de probabilité (ou distribution)* de la variable aléatoire X définie sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ est la mesure Q_X sur l'espace $(E, \mathcal{E})$ définie par

$$Q_X(A) = \mathbf{P}\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\} \text{ où } A \in \mathcal{E}.$$

Pour une variable aléatoire réelle, la distribution peut être caractérisée par la notion de fonction de répartition.

DÉFINITION 4.9

La *fonction de répartition* F_X de la variable aléatoire réelle X est la fonction à valeurs réelles définie par:

$$\begin{aligned} F_X : \mathbf{R} \to [0,1] : x \to F_X(x) &= \mathbf{P}\{\omega \in \Omega : X(\omega) < x\} \\ &= Q_X((-\infty, x)). \end{aligned}$$

Lorsque la variable aléatoire est discrète, sa fonction de répartition est une fonction en escalier; en notant $\mathbf{P}(\omega \in \Omega : X(\omega) = x_i) = p_i$ (avec $\sum_i p_i = 1$), il vient

$$F_X(x) = \sum_{i | x_i < x} p_i \ .$$

A l'opposé de variables aléatoires discrètes, on introduit les notions de variables aléatoires continues et absolument continues.

DÉFINITION 4.10

Une variable aléatoire est dite *continue* si sa fonction de répartition est continue.

Une variable aléatoire est dite *absolument continue* si sa fonction de répartition est absolument continue; on peut alors écrire:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt.$$

La fonction f_X ainsi définie est appelée *densité de probabilité.*
Cette fonction satisfait les deux conditions:

a) $f_X(t) \geq 0$ pour presque tout t;
b) $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)dt = 1$.

On peut alors introduire la notion fondamentale d'espérance mathématique d'une variable aléatoire.

DÉFINITION 4.11

L'*espérance mathématique* de la variable aléatoire X, notée $\mathsf{E}X$, est définie par le nombre réel, s'il existe:

$$\mathsf{E}X = \int_{\Omega} X(\omega)d\mathsf{P}(\omega) \ .$$

En particulier:

1) lorsque la variable aléatoire est discrète, on a

$$\mathsf{E}X = \sum_i x_i p_i \ ;$$

2) lorsque la variable aléatoire est absolument continue, on a

$$\mathsf{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx.$$

D'une manière générale, on a

$$\mathsf{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_X(x) \ .$$

On définit d'une manière analogue les moments d'une variable aléatoire.

DÉFINITION 4.12

- Le *moment d'ordre k* de la variable aléatoire X $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ est défini par la quantité
$$\mathsf{E}X^k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \cdot dF_X(x) \ .$$
- Le *moment centré d'ordre k* de la variable aléatoire X $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ est défini par la quantité
$$\mathsf{E}(X - \mathsf{E}X)^k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathsf{E}X)^k dF_X(x) \ .$$

En particulier, le moment centré d'ordre 2 s'appelle *variance*:

$$\begin{aligned} varX &= \mathsf{E}(X - \mathsf{E}X)^2 = \mathsf{E}X^2 - (\mathsf{E}X)^2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathsf{E}X)^2 dF_X(x) \ . \end{aligned}$$

La quantité $\sigma X = \sqrt{varX}$ s'appelle *écart-type*.

Une notion dérivée de celle d'espérance mathématique et qui joue un rôle considérable en théorie des probabilités est celle d'espérance conditionnelle.

DÉFINITION 4.13

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ un espace de probabilité, $\mathcal{A}$ une sous σ-algèbre de $\mathcal{F}$ et X une variable aléatoire d'espérance mathématique finie. On appelle *espérance conditionnelle* de X connaissant $\mathcal{A}$, toute variable aléatoire Y $\mathcal{A}$-mesurable telle que

$$\int_A X(\omega) d\mathsf{P}(\omega) = \int_A Y(\omega) d\mathsf{P}(\omega) \qquad \forall A \in \mathcal{A}.$$

Cette variable aléatoire est définie de manière unique presque sûrement.

L'espérance conditionnelle, qui est une variable aléatoire (et non un réel comme l'espérance mathématique), sera notée

$$Y = \mathsf{E}(X|\mathcal{A}) \ .$$

L'espérance conditionnelle satisfait aux relations suivantes.

PROPRIÉTÉ 4.1

a) L'espérance conditionnelle étant une variable aléatoire, on peut en calculer l'espérance mathématique, et on a

$$\mathsf{E}(\mathsf{E}(X|\mathcal{A}) = \mathsf{E}X \ ;$$

b) Si Z est une variable aléatoire mesurable par rapport à la sous-σ-algèbre $\mathcal{A}$, on a

$$\mathsf{E}(Z \cdot X|\mathcal{A}) = Z \cdot \mathsf{E}(X|\mathcal{A}) \ ;$$

c) Si $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont 2 sous-σ-algèbres telles que:

$$\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{F},$$

on a

$$\mathsf{E}(\mathsf{E}(X|\mathcal{A}_2)|\mathcal{A}_1) = \mathsf{E}(X|\mathcal{A}_1) \ .$$

Un outil analytique utilisé en théorie des probabilités est celui de fonction génératrice (des moments).

DÉFINITION 4.14

La *fonction génératrice* M_X de la variable aléatoire X est définie, si elle existe, par la fonction

$$\begin{aligned} M_X(u) &= \mathsf{E}(e^{X \cdot u}) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ux} dF_X(x) \, . \end{aligned}$$

Le développement en série de cette fonction au point $u = 0$, permet d'obtenir les moments de la variable X; on a en particulier

$$M'_X(0) = \mathsf{E}X \, .$$

Les deux propriétés suivantes sont relatives à la fonction génératrice de la somme de variables aléatoires.

PROPRIÉTÉ 4.2

Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, de fonction génératrice respective M_X et M_Y, la somme $S = X + Y$ admet comme fonction génératrice

$$M_S(u) = M_X(u) \cdot M_Y(u) \, .$$

Démonstration

$$\begin{aligned} M_S(u) = \mathsf{E}(e^{uS}) &= \mathsf{E}(e^{u(X+Y)}) = \mathsf{E}[e^{uX}] \cdot \mathsf{E}[e^{uY}] \\ &= M_X(u) \cdot M_Y(u) \end{aligned}$$

■

PROPRIÉTÉ 4.3

Soient

a) N une variable entière non négative telle que

- $\mathsf{P}[N = n] = p_n \qquad (n \in \mathsf{N})$
- $M_N(u) = m(u) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{un} \cdot p_n$;

b) $X_1, X_2, X_3, \ldots$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, indépendantes de la variable N, de fonction génératrice M_X.

On définit la variable

$$S = X_1 + X_2 \ldots + X_N \, .$$

La variable S est donc la somme d'un nombre aléatoire de variables aléatoires. Alors la variable S admet comme fonction génératrice

$$M_S(u) = m(\log M_X(u)) \, .$$

Démonstration :

a) Si S est la somme d'un nombre fixé de variables aléatoires indépendantes et équidistribuées, il vient, conformément à la propriété 4.2,

$$\begin{aligned} S &= X_1 + X_2 \ldots + X_n \qquad n \text{ fixé} \\ M_S(u) &= \mathbf{E}[e^{u(X_1+X_2\ldots+X_N)}] = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{E}[e^{uX_i}] \\ &= (M_X(u))^n \ . \end{aligned}$$

b) Si S est la somme d'un nombre aléatoire de variables aléatoires,

$$\begin{aligned} M_S(u) &= \mathbf{E}[e^{uS}] = \mathbf{E}[\mathbf{E}[e^{uS}|N]] \\ &= \mathbf{E}[(M_X(u))^N] = \mathbf{E}[e^{\log M_X(u)\cdot N}] \\ &= m(\log M_X(u)) \ . \end{aligned}$$

■

COROLLAIRE 4.1

$$\mathbf{E}S = \frac{d}{du} m(\log M_X(u))|_{u=0} = m'(0) \cdot \frac{M'_X(0)}{M_x(0)} = \mathbf{E}N \cdot \mathbf{E}X \ .$$

Les notions introduites ci-dessus pour une variable aléatoire peuvent être généralisées en présence de plusieurs variables aléatoires (distributions multi-dimensionnelles).

DÉFINITION 4.15

Nous appellerons *vecteur aléatoire* $\mathbf{X}$, une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{R}^N$:

$$\mathbf{X} : \Omega \to \mathbf{R}^N : \omega \to (X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_N(\omega)) \ .$$

Chacune des composantes de ce vecteur est à son tour une variable aléatoire (à valeur dans $\mathbf{R}$), dont on peut calculer les moments.

On définit alors la notion de covariance de deux variables aléatoires.

DÉFINITION 4.16

Soit $\mathbf{X}$ un vecteur aléatoire au sens de la définition 4.15.

(i) On appelle *covariance* des variables X_i et X_j la grandeur

$$cov(X_i, X_j) = \mathbf{E}[(X_i - \mathbf{E}X_i)(X_j - \mathbf{E}X_j)] \ .$$

Pour $i = j$, on a

$$cov(X_i, X_i) = var X_i \ .$$

(ii) La matrice Σ définie par

$$\Sigma_{ij} = cov(X_i, X_j)$$

est appelée *matrice variance-covariance* du vecteur $\mathbf{X}$.

(iii) On appelle *coefficient de corrélation* des variables X_i et X_j la grandeur

$$\rho(X_i, X_j) = \frac{cov(X_i, X_j)}{(varX_i \cdot varX_j)^{1/2}} .$$

(iv) Les variables X_i et X_j $(i \neq j)$ sont dites *non corrélées* ssi $\rho(X_i, X_j) = 0$.

Une notion centrale en théorie élémentaire des probabilités est celle d'indépendance, définie par:

DÉFINITION 4.17

Les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_N$ sont dites *indépendantes* si la loi de probabilité du vecteur aléatoire $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_N)$ est la loi produit des lois de probabilité des variables X_i $(i = 1, \ldots, N)$, c'est-à-dire:

$$\mathbf{P}[X_i \in B_i; \forall i \in J] = \prod_{i \in J} \mathbf{P}[X_i \in B_i]$$

pour tout ensemble J inclus dans l'ensemble $\{1, 2, \ldots, N\}$, et toute famille $\mathcal{B}_i$ de borréliens de $\mathbf{R}$ $(i = 1, \ldots, N)$.

L'indépendance est caractérisée par les propriétés suivantes.

PROPRIÉTÉ 4.4

a) Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont indépendants, et si pour $i = 1, \ldots, N$, $A_i \in \mathcal{F}(X_i)$, $(\mathcal{F}(X_i)$ étant la tribu engendrée par la variable aléatoire $X_i)$, alors

$$\mathbf{P}\left[\bigcap_{i \in J} A_i\right] = \prod_{i \in J} \mathbf{P}(A_i) ,$$

où J est inclus dans l'ensemble $\{1, 2, \ldots, N\}$. La réciproque est vraie.

b) Si X_1 et X_2 sont indépendantes, alors X_1 et X_2 sont non corrélés. La réciproque n'est pas vraie.

c) Si F_X désigne la fonction de répartition du vecteur $\mathbf{X}$ définie sur $\mathbf{R}^N$, et F_{X_i} $(i = 1, \ldots, N)$, la fonction de répartition de chaque variable X_i, définie sur $\mathbf{R}$ les variables $X_1, X_2, \ldots, X_N$ sont indépendantes ssi

$$F_X(x_1, x_2, \ldots, x_N) = F_{X_1}(x_1) \cdot F_{X_2}(x_2) \ldots F_{X_n}(x_n).$$

2 Distributions de probabilité particulières

Nous décrivons ci-dessous quelques distributions particulières utilisées dans le cours de l'ouvrage.

2.1 Distribution binomiale

DÉFINITION 4.18

On considère une expérience aléatoire pouvant avoir deux résultats possibles: succès ou échec.

L'expérience est répétée n fois; ces n essais sont supposés indépendants.

La variable aléatoire comptant le nombre de succès lors des n essais est appelée variable binomiale. Si p désigne la probabilité de succès lors de chaque expérience, la *variable binomiale* X admet une distribution discrète donnée par

$$\mathbf{P}[X = j] = \frac{n!}{j!(n-j)!} p^j (1-p)^{n-j} \quad (j = 0, 1, \ldots, n) .$$

Les caractéristiques de cette distribution sont données par:

PROPRIÉTÉ 4.5

a) Moments:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}X &= np \\ varX &= np(1-p) . \end{aligned}$$

b) Fonction génératrice: $M_X(u) = (1 + p(e^u - 1))^n$.

2.2 Distribution de Poisson

DÉFINITION 4.19

Une variable aléatoire discrète X admet une *distribution de Poisson* de paramètre λ ($\lambda > 0$) ssi

$$\mathbf{P}[X = j] = \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda} \qquad (j \in \mathbf{N}) .$$

La distribution de Poisson modélise la probabilité d'apparition d'un événement rare sur un nombre important d'observations.

Les caractéristiques de cette distribution sont données par:

PROPRIÉTÉ 4.6

a) Moments:

$$\mathsf{E}X = \lambda$$
$$varX = \lambda \ .$$

b) Fonction génératrice: $M_X(u) = \exp[\lambda(e^u - 1)]$.

2.3 Distribution de Poisson composée

DÉFINITION 4.20

Soient $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées; soit ∂ une variable aléatoire de Poisson de paramètre λ, indépendante des variables ξ_i, alors la variable X définie par

$$X = \sum_{i=1}^{\partial} \xi_i \ ,$$

est dite admettre une *distribution de Poisson composée.* Une telle variable est donc la somme d'un nombre aléatoire de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées.

Les caractéristiques de cette distribution sont données par:

PROPRIÉTÉ 4.7

a) Espérance mathématique: si $\mathsf{E}\xi$ désigne l'espérance mathématique (commune) des variables aléatoires ξ_i, on a

$$\mathsf{E}X = \lambda \cdot \mathsf{E}\xi \ .$$

b) Fonction génératrice: si M_ξ désigne la fonction génératrice (commune) des variables aléatoires ξ_i, on a

$$M_X(u) = \exp[\lambda(M_\xi(u) - 1)] \ .$$

2.4 Distribution normale

DÉFINITION 4.21

Une variable aléatoire absolument continue X admet une *distribution normale* de moyenne m et d'écart type σ ssi sa fonction densité de probabilité est donnée par

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-(x-m)^2/2\sigma^2\right] \ .$$

La variable normale X est dite centrée lorsque $m = 0$, et est dite réduite lorsque $\sigma^2 = 1$.

Les variables normales jouent un rôle central en théorie des probabilités compte tenu de leur propriété de distribution limite (théorème central limite).

La fonction de répartition d'une variable normale centrée réduite est notée canoniquement

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-z^2/2} dz \ .$$

Les caractéristiques de cette distribution sont données par:

PROPRIÉTÉ 4.8

a) Moments:

$$\begin{aligned} \mathsf{E}X &= m \\ varX &= \sigma^2 \end{aligned}$$

b) Fonction génératrice:

$$M_X(u) = \exp(m \cdot u + \frac{1}{2}\sigma^2 u^2) \ .$$

3 Processus stochastiques

Nous donnons ci-dessous quelques rudiments de la théorie des processus stochastiques (pour plus de détails, voir l'annexe 5 consacrée aux semi-martingales).

DÉFINITION 4.22

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace de probabilité, T un ensemble quelconque et $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable. On appelle *processus stochastique* défini sur Ω, admettant T comme ensemble des temps et E comme espace d'états, toute famille $(X(t))_{t \in \mathsf{T}}$ de variables aléatoires à valeurs dans E.

La variable aléatoire $X(t)$ est appelée état à l'instant t. Pour tout $\omega \in \Omega$, l'application

$$\mathsf{T} \to E : t \to X(t,\omega)$$

est appelée la trajectoire associée à ω.

Au niveau de l'ensemble T des temps, on distingue
- le cas *en temps discret*: T est un sous-ensemble de N, par exemple $\mathsf{T} = \{0, 1, 2, \ldots, T\}$;
- le cas *en temps continu*: T est un intervalle de R^+, par exemple $\mathsf{T} =$

$\{t \in [0,T] \subset \mathbf{R}^+\}$.

Dans le cas discret, le processus est donc assimilable à une suite finie ou dénombrable de variables aléatoires

$$X(0), X(1), \ldots$$

Dans le cas continu, chaque trajectoire est une fonction définie sur un intervalle fini ou non de $\mathbf{R}$.

Comme dans le cas des variables aléatoires, on supposera dans la suite que l'espace des états est un sous-ensemble fini ou non de $\mathbf{R}$ (processus à valeurs réelles). En revanche, lorsque l'espace des états est $\mathbf{R}^N$, $(N > 1)$, on parlera de processus vectoriel.

Une classe importante de processus est définie par:

DÉFINITION 4.23

Un processus stochastique X est dit à *accroissements indépendants* si $\forall n$, et $\forall\, t_1 < t_2 \ldots < t_n$, $(t_i \in \mathbf{T})$, les variables aléatoires

$$X(t_1), X(t_2) - X(t_1), \ldots, X(t_n) - X(t_{n-1})$$

sont indépendantes.

Ce processus est dit à *accroissements stationnaires* si les variables aléatoires $X(t+h) - X(t)$ et $X(h)$ sont équidistribuées.

Une notion importante en théorie des processus est celle de filtration.

DÉFINITION 4.24

Une *filtration* est une famille $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbf{T}}$ de sous σ-algèbres de $\mathcal{F}$, telle que: $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ pour $s \leq t$ (famille croissante).

La σ-algèbre $\mathcal{F}_t$ est appelée σ-algèbre des événements antérieurs à t, elle modélise les informations disponibles à l'instant t.

Au fur et à mesure que le temps s'écoule, l'information est de plus en plus importante, ce que modélise l'aspect croissant de la famille.

La liaison entre filtration et processus stochastique est assurée par les deux définitions suivantes.

DÉFINITION 4.25

Tout processus stochastique X génère une filtration appelée *filtration naturelle* du processus, définie par:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_t &= \mathcal{F}(X(s); s \leq t) \\ &= \text{filtration engendrée par les variables aléatoires antérieures à l'instant } t.\end{aligned}$$

DÉFINITION 4.26

Un processus stochastique X est dit *adapté* à une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathsf{T}}$ ssi pour tout $t \in \mathsf{T}$: la variable aléatoire $X(t)$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable (c'est-à-dire $X_t^{-1}(A) \in \mathcal{F}_t$ pour tout $A \in \mathcal{E}$).

Un processus stochastique est par définition adapté à sa filtration naturelle.

Annexe 2
Processus de Poisson

Le processus de Poisson permet de modéliser le type d'expérience suivante.

DÉFINITION 5.1

On observe au cours du temps l'apparition répétée d'un certain événement aléatoire (espace des temps $= \mathbf{R}^+$). Si:

(1) le nombre d'événements apparus dans l'intervalle $[t, t+h]$ ne dépend ni du nombre ni des dates d'apparition des événements dans l'intervalle $[0, t]$;

(2) la probabilité qu'un événement apparaisse dans l'intervalle $[t, t+h]$ est de la forme

$$\lambda h + 0(h) \qquad (\lambda > 0) \ ;$$

(3) la probabilité qu'aucun événement n'apparaisse dans l'intervalle $[t, t+h]$ est de la forme

$$1 - \lambda \cdot h + 0(h) \ ;$$

(4) la probabilité que sur l'intervalle $[t, t+h]$ se réalise plus d'un événement est égale à $0(h)$.

Alors le processus X défini par

$$X(t) = \text{nombre d'événements apparus dans l'intervalle } [0, t]$$

est un *processus de Poisson.*

La distribution d'un tel processus stochastique est donnée par:

PROPRIÉTÉ 5.1

$$\mathbf{P}[X(t) = k] = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \qquad (k \in \mathbf{N})$$

La variable aléatoire $X(t)$ admet donc une distribution de Poisson de paramètre λt.

Le processus de Poisson est caractérisé par les propriétés suivantes.

PROPRIÉTÉ 5.2

(i) Les trajectoires d'un processus de Poisson sont des fonctions en escalier, le processus étant à valeurs dans $\mathbf{N}$.

(ii) Un processus de Poisson est un processus à accroissements indépendants et stationnaires.

(iii) Tout processus à accroissements indépendants et stationnaires en escalier, dont les sauts sont égaux à 1 est un processus de Poisson.

(iv) La fonction génératrice d'un processus de Poisson est donnée par

$$M_{X(t)}(u) = \exp(\lambda t \cdot (e^u - 1)) \ .$$

En particulier, $\mathbf{E}X(t) = M'_{X(t)}(0) = \lambda t$.

Le processus de Poisson peut être interprété comme un processus de comptage, et on peut écrire:

$$X(t) = \sum_{i|S_i \leq t} 1 \ ,$$

où $\{S_1, S_2, \ldots\}$ sont les instants d'arrivée des sauts.

La notion de *processus de Poisson composé* dérive de cette interprétation: les sauts, déterministes et unitaires dans le processus de Poisson, sont remplacés par des variables aléatoires indépendantes et équidistribuées.

DÉFINITION 5.2

On considère:

(1) un processus de Poisson de paramètre λ, de la forme

$$X(t) = \sum_{i|S_i \leq t} 1 \qquad (t \geq 0) \ ;$$

(2) une suite $\xi_1, \xi_2, \ldots$ de variables aléatoires indépendantes et équidistribuées indépendantes du processus de Poisson.

Alors le processus défini par tout $t \geq 0$ par

$$Y(t) = \sum_{i|S_i \leq t} \xi_i \ ,$$

est appelé *processus de Poisson composé.*

Ce processus est donc la somme d'un nombre aléatoire de variables aléatoires, le nombre de variables aléatoires obéissant à un processus de Poisson.

En matière de moments, il vient:

PROPRIÉTÉ 5.3

(i) $M_{Y(t)}(u) = \exp(\lambda t \cdot (M_\xi(u) - 1))$ où M_ξ est la fonction génératrice (commune) des variables aléatoires $\xi_1, \xi_2, \ldots$

(ii) $\mathbf{E}Y(t) = \mathbf{E}\xi \cdot \lambda t$

Démonstration

Il suffit d'appliquer respectivement la propriété 4.3 et son corollaire 4.1, compte tenu du fait que le processus de Poisson composé peut s'écrire:

$$Y(t) = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_{X(t)} ,$$

le processus $X(t)$ admettant comme fonction génératrice

$$M_{X(t)}(u) = \exp(\lambda t(e^u - 1)).$$

Il vient alors:

$$\begin{aligned} M_{Y(t)}(u) &= M_{X(t)}(\log M_\xi(u)) \\ &= \exp(\lambda t(e^{\log M_\xi(u)} - 1)) \\ &= \exp(\lambda t(M_\xi(u) - 1)) . \end{aligned}$$

■

Annexe 3
Mouvement brownien

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace de probabilité, muni d'une filtration $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$, c'est-à-dire d'une famille croissante de sous σ-algèbres de $\mathcal{F}$.

DÉFINITION 6.1

Un processus stochastique $\{w(t,\omega); t \in \mathbf{R}^+, \omega \in \Omega\}$ est *un processus de Wiener* ou *mouvement brownien standard* si:

a) w est un processus à accroissements indépendants et stationnaires;

b) $w(t)$ admet une distribution normale, $\forall t > 0$;

c) $w(0) = 0$ p.s.;

d) $\forall t > 0 : \mathbf{E}(w(t)) = 0$

$Var(w(t)) = t.$

Le mouvement brownien est dit adapté à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}$ si $w(t)$ est une variable aléatoire $\mathcal{F}_t$ mesurable, et ce, pour tout $t \geq 0$. On suppose de plus que $\forall t, s > 0$, $w(t+s) - w(t)$ est indépendant de $\mathcal{F}_t$.

Rappelons quelques propriétés des trajectoires d'un mouvement brownien (voir p.e. Friedman (1975)).

PROPRIÉTÉ 6.1

(i) Il existe toujours une version continue d'un mouvement brownien mesurable, et tout mouvement brownien séparable et mesurable est continu (continuité presque sûre). On supposera toujours dans la suite que le processus w est continu.

(ii) Un mouvement brownien possède des trajectoires presque sûrement non à variation bornée; en particulier, presque toutes les trajectoires sont partout non différentiables.

On ne peut donc définir une différentielle par trajectoire dw, au sens classique de l'analyse. Le calcul stochastique d'Ito a néanmoins permis d'étendre la notion de différentiation aux processus stochastiques grâce à un procédé global sur l'espace Ω.

Pour ce, considérons un processus $\{f(t,\omega), t \in [0,T], \omega \in \Omega\}$ tel que $\mathbf{P}[\int_0^T f^2(t,\omega)dt < \infty] = 1$, et adapté à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}$. On dit alors que le processus f appartient à l'espace $L^2[0,T]$.

On montre qu'on peut introduire une fonctionnelle stochastique I_0^T associant au processus $f \in L^2[0,T]$, une variable aléatoire $I_0^T(f)$, définie sur $(\Omega, \mathcal{F})$, et telle que

(i) $\forall f_1, f_2 \in L^2[0,T]$ et $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}$:

$$I_0^T(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) = \alpha_1 I_0^T(f_1) + \alpha_2 I_0^T(f_2) \ ;$$

(ii) si $f(t) = 1_{[t_1,t_2]}(t)$ est la fonction caractéristique de l'intervalle $[t_1,t_2]$:

$$I_0^T(f) = w(t_2) - w(t_1) \ ;$$

(iii) si $f \in L^2[0,T]$ et si $\mathbf{E}\int_0^T f^2(t)dt < \infty$:

$$\cdot \mathbf{E} I_0^T(f) = 0$$

$$\cdot \mathbf{E}(I_0^T(f))^2 = \mathbf{E}\int_0^T f^2(t)dt \ ;$$

(iv) $\forall f \in L^2[0,T]$, $\forall c > 0$, $N > 0$:

$$\mathbf{P}\{|I_0^T(f)| > c\} \leq \mathbf{P}\{\int_0^T f^2(t)dt > N\} + \frac{N}{c^2}$$

DÉFINITION 6.2

La fonctionnelle I_0^T est appelée fonctionnelle d'intégration stochastique par rapport au mouvement brownien; la variable aléatoire $I_0^T(f)$ est appelée *intégrale stochastique définie* et se note

$$I_0^T(f) = \int_0^T f(t)dw(t) \ .$$

On peut également introduire une *intégrale stochastique indéfinie*, en considérant le processus stochastique $\{Y(t,\omega), t \in [0,T], \omega \in \Omega\}$ défini par

$$Y(t) = I_0^t(f) = \int_0^T f(s) 1_{[0,t]}(s) dw(s) .$$

La notion de différentielle stochastique découle directement de l'intégration stochastique.

DÉFINITION 6.3

Soit $\{\xi(t,\omega), t \in [0,T], \omega \in \Omega\}$, un processus stochastique tel que $\forall 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$, on ait:

$$\xi(t_2) - \xi(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} a(t)dt + \int_{t_1}^{t_2} b(t)dw(t) ,$$

où

(i) a est un processus stochastique, adapté à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}$ et tel que

$$\mathbf{P}\left[\int_0^T |a(t)|dt < \infty\right] = 1 ;$$

(ii) b est un processus appartenant à l'espace $L^2[0,T]$.

On dit alors que le processus ξ admet une *différentielle stochastique* sur $[0,T]$ et on note

$$d\xi(t) = a(t)dt + b(t)dw(t).$$

L'opération de différentiation stochastique, linéaire comme la différentiation classique, s'en distingue principalement à deux égards.

PROPRIÉTÉ 6.2

1) *Différentiation d'un produit de processus*

Si ξ_1 et ξ_2 sont 2 processus admettant une différentielle stochastique, alors le produit $\xi_1 \cdot \xi_2$ est également différentiable.

Plus exactement, si

$$\begin{aligned} d\xi_1(t) &= a_1(t)dt + b_1(t)dw(t) \\ d\xi_2(t) &= a_2(t)dt + b_2(t)dw(t) , \end{aligned}$$

alors:

$$d\xi_1(t)\xi_2(t) = \xi_1(t)d\xi_2(t) + \xi_2(t)d\xi_1(t) + b_1(t)b_2(t)dt .$$

2) *Différentiation d'un processus composé (formule d'Ito)*
Si un processus ξ admet une différentielle stochastique

$$d\xi(t) = a(t)dt + b(t)dw(t) ,$$

et si $f(t,x)$ est une fonction de $[0,T]\times\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, continue ainsi que ses dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial t}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}$, alors:

$$\begin{aligned} df(t,\xi(t)) &= \left[\frac{\partial f}{\partial t}(t,\xi(t)) + \frac{\partial f}{\partial x}(t,\xi(t))a(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,\xi(t))b^2(t)\right]dt \\ &+ \frac{\partial f}{\partial x}(t,\xi(t))b(t)dw(t) . \end{aligned}$$

Annexe 4
Distribution log-normale

DÉFINITION 7.1

Si X est une variable distribuée normalement de moyenne a et d'écart type b ($b > 0$), alors la variable

$$Y = e^X$$

est appelée une *variable log-normale* de paramètres a et b.

La densité de probabilité d'une telle variable est donnée par:

PROPRIÉTÉ 7.1

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{b\sqrt{2\pi}y} \exp - \left(\dfrac{(\ell ny - a)^2}{2b^2} \right) & \text{pour } y > 0 \\ 0 & \text{pour } y \leq 0 \end{cases}$$

Démonstration

Il suffit de calculer la différentielle de la fonction de répartition:

$$f_Y(y)dy = dF_Y(y) = dF_X(\ell ny) = \frac{1}{y} f_X(\ell ny)dy$$

où f_X est la fonction densité de probabilité d'une variable normale. ∎

Les premiers moments d'une variable log-normale sont donnés par:

PROPRIÉTÉ 7.2

(i) $\mathsf{E}(Y) = \exp(a + \frac{b^2}{2})$
(ii) $VarY = \exp(2a + b^2)(\exp(b^2) - 1)$.

Démonstration

(i)

$$\begin{aligned}\mathsf{E}(Y) &= \int_0^\infty y f_Y(y) dy \\ &= \int_0^\infty y \cdot \frac{1}{b\sqrt{2\pi y}} \exp - \left(\frac{(\ell n y - a)^2}{2b^2} \right) dy \ ,\end{aligned}$$

en opérant le changement de variable $\ell n y = x$,

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{b\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp - \frac{(x-a)^2}{2b^2} e^x dx \\ &= \frac{1}{b\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{1}{2b^2} ((x - (a+b^2))^2 - 2ab^2 - b^4) \right] dx \\ &= \frac{1}{b\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{2ab^2 + b^4}{2b^2}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\frac{1}{2b^2}(x - (a+b^2))^2 dx \\ &= \exp\left(\frac{2ab^2 + b^4}{2b^2} \right) \cdot 1 = \exp\left(a + \frac{b^2}{2} \right) \ .\end{aligned}$$

(ii) $VarY = \mathsf{E}Y^2 - (\mathsf{E}Y)^2$.

Or $Y^2 = e^{2X}$; Y^2 est donc encore une variable log-normale de paramètres

$$\begin{aligned} a' &= 2a \\ b' &= 2b \ . \end{aligned}$$

Par (i), il vient

$$\begin{aligned} \mathsf{E}Y^2 &= \exp(a' + \frac{b'^2}{2}) = \exp(2a + 2b^2) \\ VarY &= \mathsf{E}Y^2 - (\mathsf{E}Y)^2 \\ &= \exp(2a + 2b^2) - (\exp(a + \frac{b^2}{2}))^2 \\ &= \exp(2a + b^2) \cdot \left[\exp(b^2) - 1 \right] \ . \end{aligned}$$

■

Annexe 5
Théorie des semi-martingales

1 Théorie générale des processus stochastiques

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace de probabilité, muni d'une filtration $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$. L'hypothèse suivante sera toujours supposée remplie dans la suite.

DÉFINITION 8.1

La filtration $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ est dite satisfaire aux conditions habituelles si:
a) l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ est complet, et tous les ensembles $\mathbf{P}$-négligeables appartiennent à $\mathcal{F}_0$;
b) la filtration est continue à droite:

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+} = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s \qquad (t \geq 0) .$$

1.1 Processus et tribus

Un *processus à valeurs réelles* sera une application

$$X : [0, \infty[\times \Omega \to \mathbf{R} : (t, \omega) \to X_t(\omega) = X(t, \omega)$$

On notera $X(t^-,\omega)$ ou $X_{t^-}(\omega)$ la limite à gauche en $t > 0$ et $\Delta X(t,\omega) = \Delta X_t(\omega) = X(t,\omega) - X(t^-,\omega)$ le saut du processus à l'instant t, lorsque cette limite existe.

Des considérations de mesurabilité motivent les trois définitions suivantes.

DÉFINITION 8.2

Un processus X est dit *mesurable* lorsque l'application $(t,\omega) \to X(t,\omega)$ est mesurable sur $\mathbf{R}^+ \times \Omega$, muni de la tribu produit $\mathcal{B}(\mathbf{R}^+) \times \mathcal{F}$ ($\mathcal{B}(\mathbf{R}^+)$ étant la tribu des borréliens de $\mathbf{R}^+$).

DÉFINITION 8.3

Un processus X est dit *adapté* à la filtration $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ si la variable aléatoire $X(t,\omega)$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable pour tout $t \in \mathbf{R}^+$.

DÉFINITION 8.4

Un processus X est dit *progressif* par rapport à la filtration $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ si l'application $(s,\omega) \to X(s,\omega)$ est mesurable sur $[0,t] \times \Omega$, muni de la tribu produit $\mathcal{B}([0,t]) \times \mathcal{F}_t$, et ce $\forall t \in \mathbf{R}^+$.

L'analyse des trajectoires conduit à la définition suivante.

DÉFINITION 8.5

Un processus X est dit *cad-lag* si ses trajectoires sont continues à droite sur $\mathbf{R}^+$ et pourvues de limites à gauche finies sur $\mathbf{R}_0^+$.

On peut munir l'espace $\mathbf{R}^+ \times \Omega$ de deux tribus fondamentales en théorie des processus.

DÉFINITION 8.6

- La *tribu optionnelle*, notée θ, engendrée par les processus adaptés et cad-lag.
- La *tribu prévisible*, notée $\mathcal{P}$, engendrée par les processus adaptés dont les trajectoires sont continues à gauche sur $\mathbf{R}_0^+$.

On peut montrer que $\mathcal{P} \subset \theta$.

En terme de processus, on introduit la définition suivante.

DÉFINITION 8.7

Un processus X est dit *optionnel* (respectivement *prévisible*) si l'application

$(t,\omega) \to X(t,\omega)$ est mesurable sur $\mathbf{R}^+ \times \Omega$ muni de la tribu θ (resp. $\mathcal{P}$).

L'espace des processus optionnels (respectivement prévisibles) sera notée $\underline{\mathcal{O}}$ (resp. $\underline{\mathcal{P}}$.)

1.2 Temps d'arrêt

La notion de temps d'arrêt, généralisant les temps déterministes, joue un rôle essentiel en théorie des processus.

DÉFINITION 8.8

Une variable aléatoire $T : \Omega \to \mathbf{R}^+ \cup \{\infty\}$ est un *temps d'arrêt* si $\forall t \in \mathbf{R}^+$: l'événement $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.

La filtration étant supposée continue à droite, cette condition est équivalente à: $\forall t \in \mathbf{R}^+$: l'événement $\{T < t\} \in \mathcal{F}_t$.

En particulier, toute constante positive est un temps d'arrêt.

La tribu des événements antérieurs à un temps d'arrêt est définie par:

DÉFINITION 8.9

La *tribu associée au temps d'arrêt* T, et notée $\mathcal{F}_T$, est la tribu engendrée par les événements

$$\left\{ A \in \bigcup_{s>0} \mathcal{F}_s | A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \forall t \in \mathbf{R}^+ \right\} .$$

On a la classification suivante des temps d'arrêt.

DÉFINITION 8.10

Un temps d'arrêt T est dit *prévisible*, s'il existe une suite croissante de temps d'arrêt T_n vérifiant

$$\lim_{n\to\infty} T_n = T \text{ et } T_n < T \text{ sur } \{T > 0\}.$$

Un temps d'arrêt T est dit *accessible* si son graphe $[T] = \{(t,\omega) \in \mathbf{R}^+ \times \Omega : t = T(\omega)\}$ est contenu dans une réunion dénombrable de graphes de temps d'arrêt prévisibles.

Un temps d'arrêt T est dit *totalement inaccessible* si

$$\mathbf{P}[S = T < \infty] = 0, \text{ pour tout temps d'arrêt prévisible } S.$$

La notion de temps d'arrêt induit les diverses définitions suivantes.

DÉFINITION 8.11

L'*intervalle stochastique* $[U,V]$, où U et V sont deux temps d'arrêt, est défini par

$$[U,V] = \{(t,\omega) : U(\omega) \leq t \leq V(\omega)\}.$$

DÉFINITION 8.12

La filtration $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ est dite *quasi continue à gauche* si pour tout temps d'arrêt prévisible T

$$\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_{T-} ,$$

où $\mathcal{F}_{T-}$ est la tribu engendrée par les événements

$$\{A \cap \{t < T\}, \text{ où } t > 0 \text{ et } A \in \mathcal{F}_t\}$$

et par $\mathcal{F}_0$.

DÉFINITION 8.13

Un processus X est dit de *classe* (D) si la famille des variables aléatoires $\{X_T = X(T(\omega),\omega)\}$ où T parcourt l'ensemble des temps d'arrêt finis est uniformément intégrable

$$(\text{i.e.} \quad \lim_{a\to\infty} \sup_T \int_{|X_T|>a} |X_T| d\mathbf{P} = 0) .$$

1.3 Projections

Les outils de projections sont, pour les processus, l'équivalent de la notion d'espérance conditionnelle d'une variable aléatoire.

PROPRIÉTÉ 8.1

Soit X un processus mesurable, positif ou borné.

Il existe un processus optionnel, noté ${}^{o}X$ et un processus prévisible, ${}^{p}X$, appelés respectivement *projection optionnelle* et *projection prévisible* tels que:

${}^{o}X_T = \mathsf{E}(X_T|\mathcal{F}_T)$ sur $\{T < \infty\}$, pour tout temps d'arrêt T;

${}^{p}X_T = \mathsf{E}(X_T|\mathcal{F}_{T-})$ sur $\{T < \infty\}$, pour tout temps d'arrêt prévisible T.

D'une manière générale, si X est un processus mesurable quelconque ${}^{p}(X^+)$ et ${}^{p}(X^-)$ sont définis et on pose:

$${}^{p}X = \begin{cases} +\infty \text{ si } {}^{p}(X^+) = {}^{p}(X^-) = +\infty \\ {}^{p}(X^+) - {}^{p}(X^-) \text{ sinon.} \end{cases}$$

(de même pour la projection optionnelle).

De la propriété 8.1, il résulte que si X est un processus mesurable et adapté, il existe un processus optionnel Y tel que $X(t,\omega) = Y(t,\omega)$ p.s., $\forall t \in \mathbf{R}^+$. L'exemple principal de projection est le suivant: soit H une variable aléatoire intégrable; posons

$$\begin{aligned} X(t,\omega) &= H(\omega) \\ H(t,\omega) &= \text{version cad-lag de } \mathsf{E}(H|\mathcal{F}_t) \ . \end{aligned}$$

Alors

$$^{o}X(t,\omega) = H(t,\omega) \text{ et } {}^{p}X(t,\omega) = H(t^-,\omega) \ .$$

D'une manière générale, ces deux projections sont presque égales.

PROPRIÉTÉ 8.2

L'ensemble $\{(t,\omega) \in \mathbf{R}^+ \times \Omega :^{o} X(t,\omega) \neq^{p} X(t,\omega)\}$ est une réunion dénombrable de graphes de temps d'arrêt.

Remarque

Les définitions données ici se généralisent immédiatement au cas où l'ensemble des temps, est, non plus $\mathbf{R}^+$, mais un intervalle fini $[0,T]$ où $T \in \mathbf{R}_0^+$.

2 Classes de processus et de mesures aléatoires

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ un espace de probabilité, muni d'une filtration satisfaisant aux conditions habituelles (définition 8.1).

2.1 Processus croissants

Les deux définitions suivantes sont une simple caractérisation de processus en terme de leurs trajectoires.

DÉFINITION 8.14

Un processus X est dit *croissant brut* si ses trajectoires sont des fonctions croissantes, finies, et continues à droite.

Un processus croissant brut et adapté sera simplement appelé *processus croissant.*

DÉFINITION 8.15

Un processus X est dit à variation finie brut si ses trajectoires sont des fonctions à variation bornée sur tout compact, finies et continues à droite. Un processus à variation finie brut et adapté sera simplement appelé *processus à variation finie.*

Tout processus à variation finie est donc la différence de deux processus croissants.

On notera $\underline{\underline{V}}^+$ l'espace des processus croissants, et $\underline{\underline{V}}$ l'espace des processus à variation finie.

Pour les processus définis sur l'intervalle fini $[0,T]$, on notera respectivement $\underline{\underline{V}}^+[0,T]$ et $\underline{\underline{V}}[0,T]$.

Les espaces $\underline{\underline{V}}_0^+$ et $\underline{\underline{V}}_0$ désigneront respectivement les processus de $\underline{\underline{V}}^+$ et de $\underline{\underline{V}}$ nuls à l'origine.

La notion de variation totale d'une fonction se généralise.

DÉFINITION 8.16

A tout processus à variation finie $A \in \underline{\underline{V}}$, on associe le *processus variation*, $B \in \underline{\underline{V}}^+$ défini par

$$B(t,\omega) = \int_{[0,t]} |dA(s,\omega)| \ ,$$

(l'intégrale étant une intégrale ordinaire de Stieltjes trajectoire par trajectoire).

La liaison entre processus croissant et mesure motive la définition suivante.

DÉFINITION 8.17

Le processus croissant $A \in \underline{\underline{V}}^+$ est dit *intégrable* si

$$\mathbf{E}(A_\infty) = \mathbf{E}\left[\lim_{t \nearrow \infty} A(t,\omega)\right] < \infty \ .$$

De même le processus à variation finie $A \in \underline{\underline{V}}$ est dit *à variation intégrable* si son processus variation B satisfait

$$\mathbf{E}(B_\infty) = \mathbf{E}\left[\lim_{t \nearrow \infty} \int_{[0,t]} |dA(s,\omega)|\right] < \infty \ .$$

On notera $\underline{\underline{A}}^+$ l'espace des processus croissants intégrables et $\underline{\underline{A}}$ l'espace des processus à variation intégrable.

On peut étendre ces espaces par localisation.

DÉFINITION 8.18

Le processus croissant $A \in \underline{\underline{V}}^+$ est dit *localement intégrable* s'il existe une suite $(T_n)_{n\geq 0}$ de temps d'arrêt croissant p.s. vers $+\infty$, et telle que chaque processus arrêté

$$A^{T_n}(t,\omega) = \begin{cases} A(t,\omega) \text{ si } t \leq T_n(\omega) \\ A(T_n(\omega),\omega) \text{ si } t > T_n(\omega) \end{cases}$$

est intégrable.

On définit de même les processus à *variation localement intégrable.*

Les espaces de processus correspondants se notent $\underline{\underline{A}}^+_{loc}$ et $\underline{\underline{A}}_{loc}$.

Les processus croissants, et donc les processus à variation finie, admettent une décomposition du type *décomposition de Lebesgue.*

PROPRIÉTÉ 8.3

Tout processus croissant $A \in \underline{\underline{V}}^+$ admet la décomposition

$$A(t,\omega) = A^c(t,\omega) + \sum_n H_n(\omega) 1_{\{S_n \leq t\}}$$

où A^c est un processus croissant continu, les S_n sont des temps d'arrêt à graphes disjoints, et les H_n sont des variables aléatoires $\mathcal{F}_{S_n}$-mesurables.

Si de plus le processus A est prévisible ($A \in \underline{\mathcal{P}} \cap \underline{\underline{V}}^+$), les S_n peuvent être choisis prévisibles, et les variables aléatoires H_n, $\mathcal{F}_{S_n^-}$-mesurables.

On peut également, à côté de la projection prévisible introduite ci-dessus, définir pour les processus à variation localement intégrable, une autre projection, appelée projection prévisible duale, liée à l'intégration par rapport à la mesure associée au processus.

DÉFINITION 8.19

Si A est un processus croissant localement intégrable, il existe un processus croissant localement intégrable et prévisible $A^p \in \underline{\underline{A}}^+_{loc} \cap \underline{\Theta}$, appelé *projection prévisible duale* ou *compensateur de* A, tel que

$$\mathbf{E} \int_{[0,\infty[} X_s dA^p_s = \mathbf{E} \int_{[0,\infty[} X_s dA_s$$

pour tout processus prévisible $X \in \underline{\mathcal{P}}$.

Cette définition s'étend naturellement aux processus à variation localement intégrable.

La projection prévisible duale diffère généralement de la projection prévisible (propriété 8.1), mais si $A \in \underline{\underline{A}}_{loc}$, on a

$$p^{(\Delta A)} = \Delta(A^p) \cdot$$

2.2 Mesures aléatoires

La notion de mesure aléatoire joue notamment un rôle central en théorie des processus ponctuels.

DÉFINITION 8.20

On appelle *processus paramétré*, une application de $\Omega \times \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, mesurable pour la tribu produit $\mathcal{F} \times \mathcal{B}(\mathbf{R}^+) \times \mathcal{B}(\mathbf{R})$.

Un processus paramétré est dit *prévisible* s'il est mesurable par rapport à la tribu produit $\mathcal{P} \times \mathcal{B}(\mathbf{R})$.

DÉFINITION 8.21

Une *mesure aléatoire* est une famille $(\mu = (\mu(\omega, \cdot), \omega \in \Omega)$ de mesure σ-finies sur $(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}^+) \times \mathcal{B}(\mathbf{R}))$ telle que l'application $\omega \to \mu(\omega, A)$ est $\mathcal{F}$-mesurable, pour tout ensemble $A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^+) \times \mathcal{B}(\mathbf{R})$.

Une mesure aléatoire est dite *intégrable* si $\mathbf{E}[\mu(\omega, \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R})] < \infty$.

Une mesure aléatoire est dite *σ-intégrable* s'il existe une partition $A(n))$ de l'espace $\Omega \times \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}$ mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{P} \times \mathcal{B}(\mathbf{R})$, telle que:

$$\mathbf{E}\left[\int_{\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}} 1_{A(n)}(\omega, t, x) \cdot \mu(\omega, dt, dx)\right] < \infty \qquad \forall n \ .$$

Une mesure aléatoire est dite *prévisible* si pour tout borrélien $A \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$ le processus croissant

$$N^A(t, \omega) = \mu(\omega, [0, t] \times A)$$

est prévisible.

Une classe importante de mesures aléatoires pour les applications est l'ensemble des mesures aléatoires à valeurs entières.

DÉFINITION 8.22

Une mesure aléatoire μ est dite *à valeurs entières* si:

a) $\mu(\omega, \{t\} \times E) \leq 1 \qquad (\forall E \in \mathcal{B}(\mathbf{R}), \forall \omega \in \Omega, \forall t \in \mathbf{R}^+)$;

b) $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^+) \times \mathcal{B}(\mathbf{R})$: $\mu(\cdot, A)$ est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N} \cup \{+\infty\}$.

Deux exemples importants de mesures aléatoires reliées aux processus stochastiques sont:

1) *mesure aléatoire associée à un processus à variation finie*
Soit A un processus de $\underline{\underline{V}}$, et $a \in \mathbf{R}$. On pose

$$\mu(\omega, dt, dx) = dA_t(\omega) \cdot \epsilon_a(dx) ,$$

où $\epsilon_a(\cdot)$ est la mesure de DIRAC au point a.
2) *mesure aléatoire des sauts d'un processus*
Soit X un processus cad-lag. On pose

$$\mu(\omega, dt, dx) = \sum_{s>0} 1_{\{\Delta X(s,\omega)\neq 0\}} \epsilon_{(s,\Delta X_s)}(dt, dx) .$$

Cette mesure notée μ^X est à valeurs entières.

Comme pour les processus, on peut introduire un outil de projection appelé *projection prévisible duale* d'une mesure aléatoire σ-intégrable.

PROPRIÉTÉ 8.4

Si μ est une mesure aléatoire σ-intégrable, il existe une mesure ∂ prévisible et σ-intégrable telle que pour tout processus paramétré prévisible U, on a

$$\mathbf{E}\left[\int_{\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}} U(\omega, t, x)\mu(\omega, dt, dx)\right] = \mathbf{E}\left[\int_{\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}} U(\omega, t, x)\partial(\omega, dt, dx)\right] .$$

Cette mesure ∂ s'appelle projection prévisible duale de μ.
En particulier:

DÉFINITION 8.23

La projection prévisible duale de la mesure μ^X des sauts du processus X s'appelle *système de Levy* de X.
Cette mesure satisfait donc

$$\mathbf{E}\left[\sum_s U(\omega, s, \Delta X_s)1_{\{\Delta X_s \neq 0\}}\right] = \mathbf{E}\left[\int U(\omega, t, x)\partial(\omega, dt, dx)\right]$$

pour tout processus paramétré prévisible U.

2.3 Martingales

Le concept initial en théorie des martingales est donné par la définition suivante.

DÉFINITION 8.24

Une *martingale* M est un processus stochastique, adapté, cad-lag, tel que:

(i) $M(t,\omega)$ est intégrable et $\mathbf{E}(M(t,\omega)) < \infty$;
(ii) $\mathbf{E}(M(s,\omega)|\mathcal{F}_t) = M(t,\omega) \qquad \forall 0 \leq t \leq s.$

Si $\mathbf{E}(M(s,\omega)|\mathcal{F}_t) \leq M(t,\omega)$ ($\geq$ respectivement), on parle de *sur-martingale* (respectivement sous-martingale).

DÉFINITION 8.25

Une martingale M est dite de *carré intégrable* si

$$\sup \mathbf{E}(M^2(t,\omega)) < \infty \ .$$

La généralisation suivante des martingales est apparue comme essentielle en théorie de l'intégration stochastique:

DÉFINITION 8.26

Le processus cad-lag, adapté, M, est une *martingale locale* s'il existe une suite croissante de temps d'arrêt $\{T_n\}$, telle que $\lim_n T_n = +\infty$ p.s., et que les processus arrêtés $M(t\Lambda T_n,\omega)\cdot 1_{\{T_n<0\}}$ soient des martingales uniformément intégrables.

On a de même par localisation:

DÉFINITION 8.27

Une martingale locale M est dite *localement de carré intégrable* s'il existe une suite croissante de temps d'arrêt $\{T_n\}$, telle que $\lim_n T_n = \infty$ p.s., et que les processus arrêtés $M(t\Lambda T_n,\omega)) - M(0,\omega)$ soient des martingales de carré intégrable.

On notera M_{loc} l'espace des martingales locales.

La notion de martingale locale s'introduit notamment ainsi:

PROPRIÉTÉ 8.5

a) Si X est un processus croissant localement intégrable, et X^p sa projection prévisible duale, alors

$$X - X^p \text{ est une martingale locale.}$$

b) La projection prévisible d'une martingale locale X nulle à l'origine est donnée par ${}^pX = X_-$.

Deux théorèmes essentiels de décomposition des martingales sont constamment utilisés.

THÉORÈME 8.1 (théorème de décomposition de Doob)

Toute sur-martingale Z admet une décomposition unique du type

$$Z = M - A ,$$

où M est une martingale locale, et A est un processus croissant prévisible nul en 0, appelé le *processus croissant associé* à Z.

De plus, si $\lim_{t\to\infty} \mathsf{E}(Z(t,\omega)) > -\infty$, le processus croissant associé A est intégrable.

THÉORÈME 8.2 (théorème de décomposition de Lebesgue)

Une martingale locale M est dite *continue* si ses trajectoires sont continues et si $M(0,\omega) = 0$.

Une martingale locale M est dite *purement discontinue* ou somme compensée de sauts si pour toute martingale locale continue X, le processus produit $X \cdot M$ est une martingale locale nulle en 0.

On a alors: toute martingale locale M admet une décomposition unique en une somme d'une martingale locale continue notée M^c (partie continue de M) et d'une somme compensée de sauts notée M^d (partie discontinue de M).

Un outil essentiel de la théorie des martingales est la notion de crochets droit et oblique.

DÉFINITION 8.28 (crochet oblique)

Si X et Y sont deux martingales localement de carré intégrable, il existe un unique *processus à variation finie prévisible*, noté $< X, Y >$, tel que

$$X \cdot Y - < X, Y >$$

est une martingale locale nulle en 0.

Ce processus peut être défini, si X et Y sont de carré intégrable, par

$$< X, Y >_t = \lim_{n\to\infty} \sum_i \mathsf{E}\left[X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n})(Y_{t_{i+1}^n} - Y_{t_i^n})|\mathcal{F}_{t_i^n}-\right] + X_0 Y_0$$

où $i = 0, \ldots, 2^n$

$t_i^n = it2^{-n}$ (convergence au sens L^1).

La notion du crochet oblique, initialement introduite, permet de définir un processus de compensation prévisible, mais exige une condition d'intégrabilité. Le concept plus général de crochet droit permet de se débarrasser de cette condition.

DÉFINITION 8.29 (crochet droit)

Si X et Y sont deux martingales locales, il existe un unique *processus à variation finie* noté $[X,Y]$ tel que

1) $X \cdot Y - [X,Y]$ est une martingale locale

2) $\Delta[X,Y] = \Delta X \cdot \Delta Y$.

Ce processus peut être défini par

$$[X,Y]_t = \lim_{n\to\infty} \sum_i (X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n})(Y_{t_{i+1}^n} - Y_{t_i^n}) + X_0 Y_0$$

(convergence en probabilité).

Lorsque $X \equiv Y$, $[X,X]$ et $< X,X >$ sont deux processus croissants, et $< X,X >$, s'il existe, est la projection prévisible duale de $[X,X]$.

Le crochet droit satisfait aux propriétés suivantes.

PROPRIÉTÉ 8.6

a) Si X et Y sont deux martingales locales dont l'une des deux est à variation finie, on a

$$[X,Y]_t = \sum_{0\le s\le t} \Delta X_s \cdot \Delta Y_s \ .$$

b) Si X et Y sont deux martingales locales continues, $[X,Y]$ est un processus continu, donc prévisible.

c) X est une martingale locale purement discontinue ssi le processus croissant $A = [X,X]$ est purement discontinu.

En particulier, toute martingale locale à variation finie est somme compensée de sauts.

Les deux cas particuliers suivants constituent deux résultats fondamentaux de caractérisation.

PROPRIÉTÉ 8.7

a) X est un *mouvement brownien standard* ssi X est une martingale locale continue et $[X,X]_t = t$.

b) X est un *processus de Poisson* de paramètre λ ($\lambda > 0$) ssi X est un processus croissant purement discontinu, à sauts égaux à 1, tel que $X_t - \lambda t$ est une martingale locale, appelée *martingale de Poisson*.

La notion de martingale peut s'étendre aux mesures aléatoires.

DÉFINITION 8.30

Une mesure aléatoire σ-intégrable μ est une *mesure aléatoire martingale* si, pour tout processus paramétré prévisible U,

$$\mathsf{E}\left[\int U(\omega,t,x)\mu(\omega,dt,dx)\right] = 0 \ .$$

2.4 Semi-martingales

Le concept de semi-martingale obtenue par superposition d'une martingale locale et d'un processus à variation finie s'est révélé être l'outil définitif.

DÉFINITION 8.31

Une *semi-martingale* X est un processus stochastique admettant une décomposition (non unique !):

$$X = M + A$$

où M est une martingale locale nulle en $t = 0$, et A est un processus à variation finie.

Une classe essentielle de semi-martingales est constituée par:

DÉFINITION 8.32

Une semi-martingale X est dite *spéciale* s'il existe une décomposition pour laquelle le processus A est à variation localement intégrable et prévisible. La décomposition correspondante est alors unique.

On a à ce sujet:

PROPRIÉTÉ 8.8

a) Une semi-martingale X est spéciale ssi le processus croissant $X^*(t,\omega) = \sup_{s\leq t} |X(s,\omega)|$ est localement intégrable.

En particulier, une semi-martingale à sauts bornés par une constante est spéciale.

b) Toute sur- ou sous-martingale est une semi-martingale spéciale.

La caractérisation centrale d'une semi-martingale est donnée par:

DÉFINITION 8.33

On appelle *partie martingale continue* d'une semi-martingale $X = M + A$, et on note X^c, la partie continue M^c de la martingale locale nulle à l'origine M.

Ce processus X^c est indépendant de la décomposition de la semi-martingale.

La notion de *crochet droit* se généralise aux semi-martingales.

DÉFINITION 8.34

Si X et Y sont deux semi-martingales, on pose

$$[X,Y] = [X^c,Y^c] + \Sigma\Delta X \cdot \Delta Y =< X^c,Y^c > +\Sigma\Delta X \cdot \Delta Y$$

($< X^c,Y^c >$ existe bien puisque X^c et Y^c étant continus, nuls à l'origine sont à variation localement intégrable).

On a aussi

$$[X,Y]_t = X_0Y_0 + \lim_{n\to\infty} \sum_i (X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n})(Y_{t_{i+1}^n} - Y_{t_i^n})$$

(convergence en probabilité).

Le crochet droit d'une semi-martingale satisfait:

PROPRIÉTÉ 8.9

a) Le processus $[X,Y] \in \underline{\underline{V}}$, et pour $X = Y$, $[X,X] \in \underline{\underline{V}}^+$, est appelé *processus caractéristique* de la semi-martingale X.

b) La semi-martingale X est spéciale ssi sa caractéristique $[X,X]$ est un processus croissant localement intégrable (i.e. $[X,X] \in \underline{\underline{A}}^+_{loc}$).

c) $\Delta[X,Y] = \Delta X \Delta Y$.

Pour les semi-martingales à sauts bornés, on introduit le triplet des caractéristiques, qui joue notamment un rôle important en théorie des processus à accroissements indépendants.

Soit X une semi-martingale à sauts bornés par 1 (donc spéciale), de décomposition unique:

$$X = X_0 + M + B\ ,$$

où M est une martingale locale nulle en 0, et B est un processus à variation finie, prévisible nul en 0.

DÉFINITION 8.35

On appelle *caractéristiques locales* de la semi-martingale X le triplet (B,C,∂) constitué par:

(i) le processus B à variation finie;

(ii) le processus croissant C défini par:

$$C =< X^c,X^c >=< M^c,M^c >\ ;$$

(iii) la mesure aléatoire ∂, projection prévisible duale de la mesure μ^X des sauts du processus X.

On peut choisir une version (B, C, ∂), fixée à un ensemble $\mathbf{P}$-négligeable près, telle que, $\forall\omega$:

(i) $B(\cdot,\omega)$ est continu à droite;

(ii) $C(\cdot,\omega)$ est continu et non négatif;

(iii) $\Delta B(t,\omega) = \int_{(-1,1)} \partial(\omega, \{t\}, dx)$.

Les semi-martingales sont également caractérisées par une grande stabilité.

PROPRIÉTÉ 8.10

1) Le produit de deux semi-martingales est une semi-martingale.

2) Si X est une semi-martingale pour la filtration $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ et est adaptée à une sous-filtration $\{G_t, t \geq 0\}$, X est une semi-martingale pour la sous-filtration $\{G_t, t \geq 0\}$.

3 Intégration stochastique prévisible

Les deux constituants de l'intégration stochastique sont:

1) l'intégrale par rapport à un processus à variation finie (définie comme une intégrale de Stieltjes trajectoire par trajectoire);

2) l'intégrale par rapport à une martingale, dont les trajectoires ne sont généralement pas à variation finie, obtenue par un procédé de complétion fonctionnelle sur un espace de Hilbert adéquat.

3.1 Intégrale de Stieltjes stochastique

DÉFINITION 8.36

Un processus stochastique est dit *localement borné* s'il existe une suite (T_n) de temps d'arrêt croissant p.s. vers $+\infty$, telle que

$$\sup_{s \leq T_n} |X(s,\omega)| \leq n \qquad \forall n \ .$$

Si H est un processus prévisible localement borné et si G est un processus à variation finie, on peut définir le processus stochastique

$$(H \cdot G)(t,\omega) = \int_0^t H(s,\omega) dG(s,\omega) \ ,$$

(intégration classique par trajectoire).

Ce *processus* $H \cdot G$ est continu à droite, adapté et à variation finie. Si le processus G est de plus une martingale locale, alors le processus $H \cdot G$ est également une martingale locale.

3.2 Intégrale par rapport à une martingale locale

On considère successivement le cas d'une martingale de carré intégrable puis d'une martingale locale générale.

i) *Le cas des martingales de carré intégrable*
Soit X une martingale de carré intégrable. On définit l'espace

$$L_p^2(X) = \left\{ \text{processus prévisibles } H | \mathbf{E}[\int_0^\infty H^2(s,\omega) d[X,X]_s < \infty \right\} .$$

THÉORÈME 8.3

Il existe un processus stochastique unique W, appelé *intégrale stochastique* de H par rapport à X et noté $W = H \cdot X$, tel que

a) si H est un processus prévisible élémentaire, c'est-à-dire:

$$H(t,\omega) = \sum_{k=1}^{n} H_{k-1}(\omega) 1_{(t_{k-1},t_k]}(t)$$

(où les H_k sont des variables aléatoires $\mathcal{F}_{t_k}$-mesurables et bornées; les t_k sont des temps déterministes), alors

$$(H \cdot X)_t = \sum_{j=1}^{k} H_{j-1}(X_{t_j} - X_{t_{j-1}}) + H_k(X_t - X_{t_k}) \text{ pour } t \in (t_k, t_{k+1}]$$

et $(H \cdot X)$ est une martingale de carré intégrable.

b) L'application linéaire $H \to H \cdot X$ de l'espace des processus prévisibles élémentaires dans l'espace des martingales de carré intégrable noté $\mathcal{M}^2$ admet une extension unique dans $L_p^2(X)$, qui définit l'intégrale stochastique.
L'espace $L_p^2(X)$ étant muni de la norme

$$\|H\|_{L_p^2(X)} = \mathbf{E}\left[\int_0^\infty H^2(s,\omega) d[X,X]_s\right] ;$$

L'espace des martingales de carré intégrable étant muni de la norme

$$\|X\|_{\mathcal{M}^2} = \mathbf{E}[X_\infty^2] = \mathbf{E}[[X,X]_\infty]).$$

Cette intégrale stochastique satisfait:

PROPRIÉTÉ 8.11

a) Le processus $W = H \cdot X$ est un processus adapté cad-lag, et une martingale de carré intégrable.

b) $\Delta W = H \cdot \Delta X$.
c) $\forall Y \in \mathcal{M}^2$ on a:

$$\mathbf{E}\left[\int_0^\infty H(s,\omega)dX(s,\omega)\cdot Y(\infty,\omega)\right] = \mathbf{E}\left[\int_0^\infty H(s,\omega)d[X,Y]_s\right]$$

et

$$[H\cdot X,Y] = H\cdot[X,Y]\,.$$

d) si K est un processus prévisible tel que

$$\mathbf{E}\left[\int_0^\infty H^2(s,\omega)K^2(s,\omega)d[X,X]_s\right] < \infty$$

alors

$$(HK)\cdot X = H\cdot(K\cdot X) = K\cdot(H\cdot X)\,.$$

e) l'application $H \to H\cdot X$ est une isométrie de $L_p^2(X)$ dans $\mathcal{M}^2$ munis de leur norme respective.

ii) *Le cas des martingales locales*
Soit X une martingale locale. On définit l'espace:

$$L_p(X) = \{\text{ processus prévisible } H|(\int_0^t H^2(s,\omega)d[X,X]_s)^{1/2}$$

est un processus croissant localement intégrable $\}$.

THÉORÈME 8.4

Il existe une martingale locale unique W, appelée intégrale stochastique de H par rapport à X et notée $W = H\cdot X$, telle que pour toute martingale locale Y:

$$[H\cdot X,Y] = H\cdot[X,Y]\,.$$

PROPRIÉTÉ 8.12

a) Si de plus $X \in \mathcal{M}^2$, W coïncide avec l'intégrale définie au théorème 8.3.
b) $\Delta W = H\Delta X$.
c) si K est un processus prévisible localement borné:

$$(HK)\cdot X = H\cdot(K\cdot X)\,.$$

3.3 Intégrale par rapport à une semi-martingale

Soit X une semi-martingale de décomposition:

$$X = M + A$$

où M est une martingale locale et A est un processus à variation finie. Soit H un processus prévisible localement borné.

DÉFINITION 8.37

L'intégrale stochastique de H par rapport à X est définie par

$$H \cdot X = H \cdot M + H \cdot A$$

où $H \cdot A$ est l'intégrale de Stieltjes stochastique définie au paragraphe 3.1, et $H \cdot M$ est l'intégrale stochastique par rapport à une martingale locale définie au théorème 8.4.

L'intégrale stochastique jouit des propriétés suivantes.

PROPRIÉTÉ 8.13

a) Le processus $H \cdot X$ est indépendant de la décomposition additive de la semi-martingale X.

b) Le processus $H \cdot X$ est une semi-martingale.

PROPRIÉTÉ 8.14

a) Sauts : $\Delta(H \cdot X) = H\Delta X$.

b) Partie martingale continue : $(H \cdot X)^c = H \cdot X^c$.

c) Pour toute semi-martingale Y :

$$[H \cdot X, Y] = H \cdot [X, Y] .$$

d) Si X est une semi-martingale spéciale, la semi-martingale $H \cdot X$ est également spéciale.

e) Si H et K sont deux processus prévisibles localement bornés

$$(HK) \cdot X = K \cdot (H \cdot X) .$$

f) *Formule d'Ito*: cette formule constitue la base du calcul stochastique: si X est une semi-martingale et $F \in C^2(\mathbf{R})$, alors $F(X)$ est encore une semi-martingale et on a

$$F(X_t) = F(X_0) + \int_{]0,t]} F'(X_{s-}) dX_s + \frac{1}{2} \int_{]0,t]} F''(X_{s-}) d[X^c, X^c]_s$$
$$+ \sum_{0 \le s \le t} (F(X_s) - F(X_{s-}) - F'(X_{s-}) \Delta X_s) .$$

g) *Formule d'intégration par parties*: si X et Y sont deux semi-martingales, on a:

$$X_t Y_t = \int_0^t X_{s-} dY_s + \int_0^t Y_{s-} dX_s + [X, Y]_t .$$

On a enfin le théorème fondamental de caractérisation directe des semi-martingales.

PROPRIÉTÉ 8.15

Un processus adapté et cad-lag X est une semi-martingale ssi $\forall t \in \mathbf{R}_+$, l'intégrale élémentaire

$$H \to \int_0^t H(s,\omega)dX(s,\omega) = \sum_{j=1}^{k} H_{j-1}(X_{t_j} - X_{t_{j-1}}) + H_k(X_t - X_{t_k})$$

définit un opérateur linéaire continu de l'espace des processus prévisibles élémentaires muni de la convergence uniforme dans l'espace des variables aléatoires finies, muni de la convergence en probabilité.

Bibliographie

Chapitre 1 (Actions)

AASE K. (1984): *Optimum portfolio diversification in a general continuous time model*, Stochastic Processes and their Applications 18, 81-98.

BACHELIER L. (1900): *Théorie de la spéculation*, Gauthier-Villars, Paris.

BLACK F. (1972): *Capital Market Equilibrium with Restricted Borrowing*, Journal of Business 45, 444-454.

BREALEY R. et MYERS S. (1981): *Principles of corporate finance*, Mc Graw Hill, New York.

BROQUET C. et VAN DEN BERG A. (1990): *Gestion de portefeuille*, De Boeck, Bruxelles.

CASS D. et STIGLITZ J.E. (1970): *The Structure of Investors Preferences and Asset Returns*, Journal of Economic Theory 2, 122-160.

COBBAUT R. (1987): *Théorie financière*, Economica, Paris.

COX J. et ROSS S. (1976): *The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes*, Journal of Financial Economics 3, 145-166.

CUMMINS J.D. (1990): *Asset Pricing Models and Insurance Ratemaking*, Astin Bulletin 20, 125-166.

DEVOLDER P. (1991): *Actualization process and financial risk*, 2^e colloque AFIR, Brighton, vol. 3, 97-129.

DUFFIE D. (1988): *Security Markets*, Academic Press, New York.

HULL J. et WHITE A. (1985): *The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities*, Journal of Finance 42, 281-300.

JOHNSON H. et SHANNO D. (1987): *Option Pricing when the Variance is*

Changing, Journal of Financial and Quantitative Analysis 22 n° 2.

LEUTENEGGER M.A. (1989): *Gestion de portefeuille et théorie des marchés financiers*, Economica, Paris.

LINTNER J. (1969): *The aggregation of investors diverse judgements*, Journal of Financial and Quantitative Analysis 4, 346-382.

LINTNER J. (1965): *The Valuation of Risky Assets and the Selection of Risky Investments*, Review of Economics and Statistics 47, 13-37.

MARKOWITZ H. (1952): *Portfolio Selection*, Journal of Finance, 7, 77-91.

MERTON R. (1973): *An Intertemporal Capital Asset Pricing Model*, Econometrica, 41, 867-880.

MERTON R. (1976): *Option Pricing when Underlying Stock Returns are Discontinuous*, Journal of Financial Economics 3, 125-144.

MERTON R. (1982): *On the Microeconomic theory of Investment under Uncertainty*, Handbook of Math. Econ., North Holland, Amsterdam.

MULLER H. (1987): *Economic Premium Principle in Insurance and the Capital Asset Pricing Models*, Astin Bulletin, 17, n°2, 141-150.

MULLER H. (1988): *Modern Portfolio Theory: Some Main Results*, Astin Bulletin, 18, 127-145.

SAMUELSON P. (1973): *Mathematics on Speculative Price*, Siam Review, 15, n°1, 1-42.

SHARPE W.F. (1963): *A Simplified Model for Portfolio Analysis*, Management Science, 9, n° 1, 277-293.

SHARPE W.F. (1964): *Capital Asset Prices*, Journal of Finance, 19, 425-442.

SHARPE W.F. (1970): *Portfolio Theory and Capital Market*, Mc Graw Hill, New York.

Chapitre 2 (Obligations)

BRENNAM M.J. et SCHWARTZ E.S. (1979): *A Continuous Time Approach to the Pricing of Bonds*, Journal of Banking and Finance, 3, 133-155.

BRENNAM M.J. et SCHWARTZ E.S. (1982): *An Equilibrium Model of Bond Pricing and a Test of Market Efficiency*, Journal of Financial and Quantitative Analysis 17, 303-329.

COX J., INGERSOLL J. et ROSS S. (1979): *Duration and the Measurement of Basis Risk*, Journal of Business, 52, n° 1, 51-61.

COX J., INGERSOLL J. et ROSS S. (1985): *A Theory of the Term Structure of Interest Rates*, Econometrica 53, n° 2, 385-407.

COX J., INGERSOLL J. et ROSS S. (1985): *An Intertemporal General Equilibrium Model of Asset Prices*, Econometrica 53, n° 2, 363-384.

FISHER L. et WEILL R.L. (1971): *Coping with the Risk of Interest Rate Fluctuations*, Journal of Business 44, 408-431.

HEATH D., JARROW R. et MORTON A. (1987): *Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: a New Methodology*, Cornell University, work-

ing paper.

HEATH D., JARROW R. et MORTON A. (1990): *Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: Discrete Time Approximation*, Journal of financial and quantitative Analysis 25, 419-440.

HO T. et LEE S. (1986): *Term Structure Movement and Pricing Interest Rate Contingent Claims*, Journal of Finance, 41, n° 5, 1011-1029.

MERTON R. (1988): *Continuous Time Finance*, Blackwell.

RAMASWANY K. et SUNDARESAN S. (1986): *The Valuation of Floating Rate Instruments*, Journal of Financial Economics 17, 251-272.

RASSI F., MERCIER G. et GOURLAOUEN J.P. (1989): *Les taux d'intérêt*, Editions Eska, Paris.

REDINGTON F.M. (1952): *Review of the Principles of Life Office Valuations*, Journal of Inst. of Act. 78, 286-315.

REITANO R. (1991): *Non Parallel Yield Curve Shift and Durationnal Leverage*, 2^e colloque AFIR, Brighton, vol. 1, 145-168.

SHIU E. (1987): *On the Fisher-Weill Immunization Theory*, Insurance: Mathematics and Economics 6, 259-266.

SHIU E. (1990): *On Redington's Theory of Immunization*, Insurance: Mathematics and Economics 9, 171-175.

VASICEK O. (1977): *An Equilibrium Characterization of the Term Structure*, Journal of Financial Economics 5, 177-188.

Chapitre 3 (Options)

AUGROS J.C. (1987): *Finance / options et obligations convertibles*, Economica, Paris.

AUGROS J.C. (1989): *Les options sur taux d'intérêt*, Economica, Paris.

BELLALAH M. (1990): *Gestion quantitative du portefeuille et nouveaux marchés financiers*, Nathan, Paris.

BLACK F. et SCHOLES M. (1973): *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, Journal of Political Economy 81, 637-659.

BRENNAM M.J. et SCHWARTZ E.S. (1976): *The Pricing of Equity Linked Life Insurance Policies with an Asset Value Garantee*, Journal of Financial Economics 3, 195-213.

COURTADON G. (1982): *The Pricing of Options on Default-free Bonds*, Journal of Financial and Quantitative Analysis 17, 75-100.

COX J., ROSS S. et RUBINSTEIN M. (1979): *Option Pricing: a Simplified Approach*, Journal of Financial Economics, 7, 229-263.

COX J. et RUBINSTEIN M. (1985): *Option Markets*, Prentice Hall, New Jersey.

DELVAUX T. et MAGNEE M. (1991): *Les nouveaux produits d'assurance-vie*, Editions de l'Université de Bruxelles.

HARRISON J. et PLISKA S. (1981): *Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading*, Stochastic Processes and their Appli-

cations, 11, 215-260.

HARRISON J et PLISKA S. (1983): *A Stochastic Calculus Model of Continuous Trading: Complete Markets*, Stochastic Processes and their Applications 15, 313-316.

HARRISON J. et KREPS D. (1979): *Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Market*, Journal of Economic Theory 20, 381-408.

KREPS D. (1979): *Multiperiod Securities and the Efficient Allocation of Risk*, Conf. on Econ. of infor and incert., Boston.

KHOURY N. et LAROCHE P. (1990): *Options et contrats à terme*, Nathan, Paris.

MALLIARIS A.G. et BROCK W.A. (1981): *Stochastic Methods in Economics and Finance*, North Holland, Amsterdam.

MERTON R. (1973): *Theory of Rational Option Pricing*, Bell Journal of Economics 4, 141-183.

SCHWEIZER M. et FÖLLMER M. (1988): *Hedging by Sequential Regression: an Introduction to the Mathematics of Option Trading*, Astin Bulletin 18, 147-160.

Annexes

BOULEAU N. (1988): *Processus stochastiques*, Hermann, Paris.

CINLAR E. (1975): *Introduction to Stochastic Processes*, Prentice Hall, New Jersey.

DELLACHERIE C. et MEYER P.A. (1975): *Probabilités et potentiel*, tome 1, Hermann, Paris.

DELLACHERIE C. et MEYER P.A. (1980): *Probabilités et potentiel*, tome 2, Hermann, Paris.

DOOB J.L. (1954): *Stochastic Processes*, J.Wiley, New York.

ELLIOT R. (1982): *Stochastic Calculus and Applications*, Springer-Verlag. Berlin-Heidelberg-New York.

FRIEDMAN A. (1975): *Stochastic Differential Equations and Applications*, Academic Press, New York.

GIHMAN I. et SKOROKHOD A. (1979): *The Theory of Stochastic Processes*, 3 volumes, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York.

GODOUNOV S. (1973): *Equations de la physique mathématique*, Editions Mir, Moscou.

JACOD J. (1979): *Calcul stochastique et problème de martingales*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York.

Index

Actif sous-jacent: 152
Action: 8
Actualisation: **28-31**, **41-50**
ALM: **138-142**
Arbitrage (opportunité d'): 111, 120, **187**
- (raisonnement d'): 100, 171
Arbitrage à une variable (modèle d'): 99-104
Arbitrage à deux variables (modèle d'): 105-107

Bêta (coefficient): 72, 77
Binomial (modèle d'action): **15-17**
- (modèle d'option): **165-170**, 195-199
Black et Scholes (modèle de): **170-180**, 204
Brennan et Schwartz (modèle de): 105-107
Brownien additif (modèle d'action): 21, 22
Brownien géométrique (modèle d'action): **22-25**
Brownien (mouvement): 22, **229-232**, 246

CAPM: **71-79**
Call: voir Option d'achat
Capitalisation boursière: 71
Caractéristiques locales (d'une semi-martingale): 248
Chargement de sécurité: 206, 207, 208
Compensateur: 241

Contrat à terme: 164
Convexité (d'une obligation): 129
Coupon: 82
Courbe des taux: **94-98**
Cox, Ingersoll, Ross (modèle de): 107, 108, 144, 145
Cox, Ross (modèle d'action): 27, 180
Cristallisation: 147
Crochet droit: 246, 248
- oblique: 245

Distribution binomiale: 219
- log-normale: 233, 234
- normale: 220, 221
- de Poisson: 219, 220
- de Poisson composée: 220

Diversification: 60, 61, 62
Dividende: 8
Droit conditionnel: 186, 201
- réalisable: 186, 201

Duration: **126-129**
- généralisée: 131
- modifiée: 127
- partielle: 132
- stochastique: 143, 144, 145

Effet de levier: 162

Facteur d'actualisation: 28, 29, 42
- de capitalisation: 28, 29,41

Filtration: 222
Fisher et Weill (théorème de): **136-138**
Flux de rendement: 11, 32

Gordon-Shapiro (modèle de): 9

Heath, Jarrow et Morton (modèle de): **117-126**
Ho et Lee (modèle de): **108-117**, 123, 124, 125
Hull et White (modèle de): 28

Immunisation: **133-138**, 145
Indice de splitting: 194, 195
Intégrales stochastiques: 230-232, 249-253
Intertemporal CAPM: 78, 79

Ito (formule de): 232, 252

Johnson et Shanno (modèle de): 27

Marché complet: 194, 202
- parfait: 50
Marge actuarielle cristallisée: 147
- additive standard: 147
- nominale additive: 146
- nominale multiplicative: 146
Markowitz (modèle de): 52-62
Martingale: **243-247**
- de Poisson: 246
- locale: 244
Matrice variance-covariance: 51
Merton (modèle de): 26, 27, 181
Mesure martingale (ou mesure neutre du risque): 121, 156, 178-180, 182, 187
Moyenne-variance avec titre risqué (modèle): **64-71**
- sans titre risqué (modèle): **52-62**

Obligation: 82
- à taux fixe: 83
- à taux revisable: 146
- à taux variable: 83, **145-149**
- classique: 83
- zéro-coupon: 82
Option: 152
- américaine: 152
- d'achat: 152
- de vente: 152
- européenne: 152
- sur action: **165-181**
- sur devise: 152
- sur obligation: 181, 182
- synthétique: 163, 164

Parité (principe de): 159
Partie martingale continue (d'une semi-martingale): 247
Poisson (modèle d'action): **17-21**
Portefeuille: 51
- dédicacé: 139
- efficient: 52
- frontière: 53

- frontière conjugué: 57
- marché: 72
Prime d'émission: 83
- de remboursement: 83
- de risque: 104, 108
- (principe de calcul): 206
Prix d'exercice (d'une option): 152
- du risque sur le marché: 101, 106, 107
Probabilité binomiale implicite: 111, 112
- neutre: 166, 167
Processus à accroissements indépendants: 222
- adapté: 223, 236
- caractéristique: 248
- de Poisson: **225-227**, 246
- de Poisson composé: 226, 227
- de valeur: 185, 200
Put (voir option de vente)

Redington (théorème de): **139-141**
Risque de base (d'un échéancier): 143
- de réalisation: 91, 92, 93, 114
- de réinvestissement: 91, 92, 93, 114
- systématique: 58, 77

Scott (modèle de): 27
Security market line: 73
Semi-martingale: **247-249**
- (modèle d'action): **31-50**
- spéciale: 247
Sharpe (modèle de): 62, 63, 64
Shiu (modèle de): 141, 142
Stratégie: 184, 200
- admissible: 185, 201
- auto-financée: 185, 200
- de la duration: 134, 135
- de la maturité: 134, 135
Système de prix: 186
- consistant: 186

Taux à terme: 95, 96, 97, 98
- au comptant: 94, 95, 96, 97, 98
- d'intérêt nominal: 83
- de rendement (d'un titre): 14, 51

- de rendement actuariel: 83, 84
- de rendement à l'échéance: 84,85
- de rendement anticipé: 84
- long terme: 105
- spot: 99

Temps d'arrêt: 237, 238
Titre agressif: 73
- avec distribution: 8, 13-15
- de capitalisation: 8, 10, 11, 12, 13
- défensif: 73
- négociable: 8
- sans risque: 52, 64

Unités de comptes (contrat en): 202
Utilité (fonction d'): **74-77**

Vasicek (modèle de): 104
Vente à découvert: 62
Viable (modèle): 191

Zéro-bêta CAPM (modèle): 73

Table des matières

PRÉFACE vii

INTRODUCTION 1

CHAPITRE 1. LES ACTIONS 7

1 Introduction **7**

2 Définitions générales **8**
2.1 L'action 8
2.2 Le dividende 8
2.3 Le titre négociable 8
2.4 Le titre avec distribution 8

3 Modèles déterministes **9**
3.1 Modèle d'évaluation de Gordon-Shapiro 9
3.2 Modèle d'évolution d'un titre de capitalisation 10
3.2.1 Modèle discret de capitalisation 10
3.2.2 Modèle continu de capitalisation 10
3.2.3 Modèle général d'évolution 11
3.3 Modèle d'évolution d'un titre avec distribution 13

4 Modèles stochastiques d'évolution **15**
4.1 Modèle binomial 15
4.2 Modèle de Poisson 17
4.3 Modèle brownien additif 21
4.4 Modèle brownien géométrique 22
4.5 Variations diverses 25
4.5.1 Modèle de Merton 26
4.5.2 Modèles à volatilité non constante 27
4.6 Processus d'actualisation 28
4.7 Modèle général de semi-martingales 31
4.7.1 Introduction 31
4.7.2 Actif stochastique 35
4.7.3 Actualisation stochastique 41

5 Modèles d'équilibre de marché **50**
5.1 Considérations générales 50
5.2 L'approche moyenne-variance 52
5.3 Le modèle de Sharpe (1963) 62
5.4 Modèle avec titre non risqué 64
5.5 Capital Asset Pricing Model 71
5.6 Extensions diverses 74
5.6.1 Approche par la théorie des fonctions d'utilité 74
5.6.2 Modèles dynamiques de portefeuille 78

CHAPITRE 2. LES OBLIGATIONS 81

1 Introduction **81**

2 Définitions générales **82**
2.1 Les obligations 82
2.2 Les obligations à coupons et zéro-coupon 82
2.3 Les obligations à taux fixe et à taux variable 83
2.4 Les obligations classiques 83

3 Les obligations et le risque financier **84**
3.1 Position du problème 84
3.2 Exemple 87

4 Structure par terme des taux d'intérêt **93**
4.1 Constatations empiriques 93
4.2 Définitions des courbes de taux 94

5 Modèles stochastiques de structure des taux d'intérêt 98
5.1 Modèle d'arbitrage à une variable d'état 99
5.2 Modèle d'arbitrage à deux variables d'état 105
5.3 Modèle d'équilibre intertemporel 107
5.4 Modèle de déformation binomial de Ho et Lee 108
5.5 Modèle de déformation discret de Heath, Jarrow et Morton . . . 117

6 Théories de l'immunisation 126
6.1 Le concept de duration 126
6.2 Immunisation classique 133
6.2.1 Constatation empirique 133
6.2.2 Immunisation de titres obligataires 135
6.3 Application de l'immunisation: Assets Liabilities Management . 138
6.4 Duration stochastique 143

7 Obligations à taux variable 145
7.1 Définitions générales 146
7.2 Technique de cristallisation 147
7.3 Evaluation par arbitrage 148

CHAPITRE 3. LES OPTIONS 151

1 Introduction 151

2 Définitions générales 152

3 Propriétés générales 153
3.1 Notations 153
3.2 Valeurs à l'échéance 154
3.3 Valeurs en univers certain 154
3.4 Evaluation en univers incertain: exemple élémentaire 154
3.5 Bornes sur les prix 158
3.6 Relation de parité entre option d'achat et option de vente 159
3.7 Rentabilité de l'option 160
3.8 Options synthétiques 163
3.9 Remarques 164

4 Modèles stochastiques d'évaluation d'options sur actions **165**
4.1 Modèle binomial 165
4.2 Modèle de Black et Scholes 170
4.2.1 Equation de structure 171
4.2.2 De l'équation de structure à l'équation de la chaleur . . . 172
4.2.3 De l'équation de la chaleur à la formule de Black et Scholes 175
4.2.4 Approche par les mesures-martingales 178
4.3 Extensions diverses 180
4.3.1 Modèle de Cox et Ross (1976) 180
4.3.2 Modèle de Merton 181

5 Modèles stochastiques d'évaluation d'options sur obligations **181**

6 Modèle général de tarification des actifs conditionnels **182**
6.1 Modèle discret 183
6.2 Exemples 195
6.3 Modèle continu 199

7 Application des options à l'assurance sur la vie **202**
7.1 Formulation du problème 203
7.2 Calcul de la prime unique 203
7.3 Propriétés 205

ANNEXE 1. VARIABLES ALÉATOIRES ET PROCESSUS STOCHASTIQUES 211

1 Définitions générales de la théorie élémentaire des probabilités **211**

2 Distributions de probabilité particulières **219**
2.1 Distribution binomiale 219
2.2 Distribution de Poisson 219
2.3 Distribution de Poisson composée 220
2.4 Distribution normale 220

3 Processus stochastiques **221**

ANNEXE 2. PROCESSUS DE POISSON 225

ANNEXE 3. MOUVEMENT BROWNIEN 229

ANNEXE 4. DISTRIBUTION LOG-NORMALE 233

ANNEXE 5. THÉORIE DES SEMI-MARTINGALES 235

1 Théorie générale des processus stochastiques 235
1.1 Processus et tribus 235
1.2 Temps d'arrêt 237
1.3 Projections 238

2 Classes de processus et de mesures aléatoires 239
2.1 Processus croissants 239
2.2 Mesures aléatoires 242
2.3 Martingales 243
2.4 Semi-martingales 247

3 Intégration stochastique prévisible 249
3.1 Intégrale de Stieltjes stochastique 249
3.2 Intégrale par rapport à une martingale locale 250
3.3 Intégrale par rapport à une semi-martingale 251

BIBLIOGRAPHIE 255

INDEX 259

TABLE DES MATIÈRES 265

Nouvelle Imprimerie Duculot S A , Gembloux (Belgique) Tél. (081) 61 00 61

ACTUARIAT

L'ouvrage

Dans un éditorial resté fameux (*ASTIN Bulletin* 17, 1988), Hans Bühlmann saluait, il n'y a guère, la confluence des mondes de la finance et de l'assurance, et l'apparition d'une nouvelle catégorie d'actuaires – *les actuaires du troisième type* – dont les activités débordent très largement le cadre des compagnies pour s'étendre à celui de la banque et de la finance.

Cette émergence, par interpénétration de deux secteurs d'activité jadis distincts, du secteur de la bancassurance ne correspond pas seulement à une évolution de la pratique économique: elle traduit également d'importants bouleversements techniques. Tant la prise en compte, dans la gestion actuarielle, de risques financiers souvent prépondérants que la maîtrise des produits financiers nouveaux requièrent en effet la mise en œuvre d'outils probabilistes et mathématiques perfectionnés – processus aléatoires, calcul stochastique, intégrale d'Ito,... – auprès desquels font figure bien obsolète les calculs d'intérêts composés des manuels de mathématique financière traditionnels.

Le présent ouvrage procure une introduction mathématiquement rigoureuse, mais cependant lisible, au calcul financier moderne. Ecrit par un actuaire, il porte sur la problématique financière un regard original, lié à la longue tradition actuarielle en gestion du risque et aux impératifs de stabilité à long terme caractéristiques du secteur de l'assurance.

L'auteur

Pierre Devolder est licencié en Sciences mathématiques, licencié en Sciences actuarielles et docteur en Sciences de l'Université libre de Bruxelles, il fut lauréat, en 1985, du premier *ASTIN Competition for young Researchers* et, la même année, du prix triennal Fonds national de la Recherche scientifique-Royale Belge. Il mène de front une carrière professionnelle à la Royale Belge, et une activité d'enseignement et de recherche à l'Université libre de Bruxelles et à l'Université Louis Pasteur de Strasbourg.

9 782800 410623

couverture j.-C. Geluck / T. Suykens / M.-R. Vandeputte

Règles d'utilisation de copies numériques d'œuvres littéraires publiées par les Editions de l'Université de Bruxelles et mises à disposition par les Archives & Bibliothèques de l'ULB

L'usage des copies numériques d'œuvres littéraires, ci-après dénommées « copies numériques », publiées par les Editions de l'Université de Bruxelles, ci-après dénommées EUB, et mises à disposition par les Archives & Bibliothèques de l'ULB, implique un certain nombre de règles de bonne conduite, précisées ici. Celles-ci sont reproduites sur la dernière page de chaque copie numérique publiée par les EUB et mises en ligne par les Archives & Bibliothèques. Elles s'articulent selon les trois axes : protection, utilisation et reproduction.

Protection

1. Droits d'auteur

La première page de chaque copie numérique indique les droits d'auteur d'application sur l'œuvre littéraire. La mise à disposition par les Archives & Bibliothèques de l'ULB de la copie numérique a fait l'objet d'un accord avec les EUB, notamment concernant les règles d'utilisation précisées ici. Pour les œuvres soumises à la législation belge en matière de droit d'auteur, les EUB auront pris le soin de conclure un accord avec leurs ayant droits afin de permettre la mise en ligne des copies numériques.

2. Responsabilité

Malgré les efforts consentis pour garantir les meilleures qualité et accessibilité des copies numériques, certaines défectuosités peuvent y subsister – telles, mais non limitées à, des incomplétudes, des erreurs dans les fichiers, un défaut empêchant l'accès au document, etc. -. Les EUB et les Archives & Bibliothèques de l'ULB déclinent toute responsabilité concernant les dommages, coûts et dépenses, y compris des honoraires légaux, entraînés par l'accès et/ou l'utilisation des copies numériques. De plus, les EUB et les Archives & Bibliothèques de l'ULB ne pourront être mis en cause dans l'exploitation subséquente des copies numériques ; et la dénomination des EUB et des 'Archives & Bibliothèques de l'ULB', ne pourra être ni utilisée, ni ternie, au prétexte d'utiliser des copies numériques mises à disposition par eux.

3. Localisation

Chaque copie numérique dispose d'un URL (uniform resource locator) stable de la forme <http://digistore.bib.ulb.ac.be/annee/nom_du_fichier.pdf> qui permet d'accéder au document ; l'adresse physique ou logique des fichiers étant elle sujette à modifications sans préavis. Les Archives & Bibliothèques de l'ULB encouragent les utilisateurs à utiliser cet URL lorsqu'ils souhaitent faire référence à une copie numérique.

Utilisation

4. Gratuité

Les EUB et les Archives & Bibliothèques de l'ULB mettent gratuitement à la disposition du public les copies numériques d'œuvres littéraires sélectionnées par les EUB : aucune rémunération ne peut être réclamée par des tiers ni pour leur consultation, ni au prétexte du droit d'auteur.

5. Buts poursuivis

Les copies numériques peuvent être utilisés à des fins de recherche, d'enseignement ou à usage privé. Quiconque souhaitant utiliser les copies numériques à d'autres fins et/ou les distribuer contre rémunération est tenu d'en demander l'autorisation aux EUB, en joignant à sa requête, l'auteur, le titre, et l'éditeur du (ou des) document(s) concerné(s). Demande à adresser aux Editions de l'Université de Bruxelles (editions@admin.ulb.ac.be).

6. Citation

Pour toutes les utilisations autorisées, l'usager s'engage à citer dans son travail, les documents utilisés, par la mention « Université Libre de Bruxelles – Editions de l'Université de Bruxelles et Archives & Bibliothèques » accompagnée des précisions indispensables à l'identification des documents (auteur, titre, date et lieu d'édition).

7. Liens profonds

Les liens profonds, donnant directement accès à une copie numérique particulière, sont autorisés si les conditions suivantes sont respectées :
a) les sites pointant vers ces documents doivent clairement informer leurs utilisateurs qu'ils y ont accès via le site web des Archives & Bibliothèques de l'ULB ;
b) l'utilisateur, cliquant un de ces liens profonds, devra voir le document s'ouvrir dans une nouvelle fenêtre ; cette action pourra être accompagnée de l'avertissement 'Vous accédez à un document du site web des Archives & Bibliothèques de l'ULB'.

Reproduction

8. Sous format électronique

Pour toutes les utilisations autorisées mentionnées dans ce règlement le téléchargement, la copie et le stockage des copies numériques sont permis ; à l'exception du dépôt dans une autre *base de données*, qui est interdit.

9. Sur support papier

Pour toutes les utilisations autorisées mentionnées dans ce règlement les fac-similés exacts, les impressions et les photocopies, ainsi que le copié/collé (lorsque le document est au format texte) sont permis.

10. Références

Quel que soit le support de reproduction, la suppression des références aux EUB et aux Archives & Bibliothèques de l'ULB dans les copies numériques est interdite.